NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE.

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM.

TWEEDE REEKS.
DEEL I.

AMSTERDAM,
W. VERSLUYS.
1895.

Het „Nieuw Archief voor Wiskunde" *wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam*, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven."

De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.

De Redacteur,

Leiden, Juli 1894. D. BIERENS DE HAAN,

Eerste Secretaris van het Genootschap,

onder de zinspreuk:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

INHOUD.

Kleinere mededeelingen.

ERRATUM.

Blz. 202 regel 15 v. o. *staat:* $R +$ *lees:* $R =$

FRANCISCUS JOHANNES VAN DEN BERG.

Wij kunnen de tweede reeks van het door hem zoo geliefd Tijdschrift niet beter inleiden dan door de herdenking van de onvermoeide werkzaamheid van VAN DEN BERG, waarvan de eerste reeks zoo talrijke bewijzen mag leveren. Maar ook zijn wij in staat deze nieuwe reeks te beginnen met een paar opstellen van zijne hand, als het ware zijne wetenschappelijke nalatenschap, die nog in onze handen berustten. Waarlijk, zoo ooit van iemand, het mag van VAN DEN BERG gezegd worden: Een onvermoeide arbeid komt alles te boven. In het begin van zijn loopbaan in een praktischen werkkring geplaatst, die hem niet bevredigde, — aan het einde daarvan door ongesteldheid genoodzaakt, van zijne lievelingsbetrekking afstand te doen, — altijd en altijd door heeft hij zich met onvermoeiden ijver aan wiskundige werkzaamheid gewijd.

FRANCISCUS JOHANNES VAN DEN BERG werd den 19den Juli 1833 geboren; zijne ouders waren PETRUS FRANCISCUS VAN DEN BERG, eertijds handelaar in granen, later Agent van de Nederlandsche Handelmaatschappij, en EMILIA MARIA THERESIA VAN KERCKHOFF; er waren verscheidene zoons, die tot nuttige leden der maatschappij opgroeiden en zeer gewichtige betrekkingen bekleedden; in het echt hollandsch huisgezin heerschte een vertrouwelijke, hoogst vriendschappelijke toon tusschen ouders en kinderen.

VAN DEN BERG genoot lager onderwijs op de school van den

heer SCHLUIMER, en werd in 1848 toegelaten als leerling van de toenmalige afdeeling B aan het Erasmiaansche Gymnasium, toenmaals onder het Rektoraat van den als paedagoog beroemden SCHNEITHER. Bovendien ontving hij op raad van zijn oom Prof. Dr. P. J. VAN KERCKHOFF privaat onderwijs in wiskunde van Dr. M. C. MENSING.

Nadat hij hier den vierjarigen cursus had afgeloopen, ging hij vervolgens naar de Koninklijke Akademie tot opleiding van Ingenieurs te Delft, en werd bij Kon. Besluit van 21 Mei 1853 benoemd tot Aspirant-Ingenieur van Waterstaat, met bepaling dat hij met ingang van 1 Juli 1853 te 's Gravenhage zoude dienst doen onder den Ingenieur VAN DER KUN.

Bij Kon. Besluit van 30 December 1857 werd hij benoemd tot Ingenieur 2e klasse, met aanwijzing van Zutphen als standplaats onder den Ingenieur ORTT. Hier wijdde hij zich geheel aan zijne praktische werkzaamheden en leefde zeer stil, zonder veel verkeering met anderen; maar hij was met zijne betrekking geenszins ingenomen. Evenwel verminderde zijn lust tot meer theoretische studien niet. VAN DEN BERG beantwoordde in 1859 zes prijsvragen, uitgeschreven door het Genootschap. »Een onvermoeide Arbeid, enz." over onderwerpen uit analytische Meetkunde en Hydrodynamica.

Hij bleef echter zoo sterk onder den indruk van werkzaamheden, niet overeenstemmende met zijne neigingen, dat hij ongesteld werd, en daarna in 1860 naar Leeuwarden werd verplaatst. Het was hem later een ware verrassing, toen hij, zonder daartoe aanzoek te hebben gedaan en zonder daaromtrent ook gepolst te zijn, bij Kon. Besluit van 29 Juni 1864 zijne benoeming ontving als Hoogleeraar in zuivere en toegepaste wiskunde aan de toen opgerichte Polytechnische School te Delft, en dientengevolge bij Kon. Besluit van 3 Juli 1864 tegelijk zijn eervol ontslag als Ingenieur ontving. Hoezeer in den beginne wel wat ontstemd over het arbitraire van dezen maatregel, verzoende hij zich toch spoedig daarmede, en begreep hij, welk een vooruitzicht zich voor hem opende.

In deze betrekking, zoo geheel naar zijn wensch, bleef hij steeds werkzaam, eerst onder Dr. L. COHEN STUART,

later onder Dr. J. Bosscha, als Directeuren der Polytechnische School; tot den zomer van 1883, toen hij begon te lijden aan de kwaal, die hem dwong tot het vragen van ontslag, hetgeen hem bij Kon. Besluit van 24 Juni 1884, met ingang van 5 September verleend werd.

Van 1864—1876 was hij tevens onbezoldigd Bibliothecaris der Polytechnische School.

Ter gelegenheid van het Eeuwfeest der Rijks-Universiteit te Utrecht in 1866 werd hij tot Doctor honoris causa in de wis- en natuurkunde benoemd. In September 1853 werd hij lid van het Kon. Inst. v. Ingenieurs en van 1865—68, 1874—77 en 1880—83 lid van den Raad van Bestuur. Ook was hij lid van de Kon. Akad. v. Wet. (1875), van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen, van het Bataafsch Genootschap van proefondervindelijke wijsbegeerte.

Sedert bleef hij zich als ambteloos burger aan zijn geliefkoosde studien wijden, nam een werkzaam aandeel aan de bemoeiingen der Huygens-Commissie, die in 1883 begon met de uitgave van de »Correspondance de Chr. Huygens", en verbleef 's zomers meestal te Oeynhausen en 's winters te Hilversum in het Pension Trompenberg: geduldig en gelaten droeg hij zijn lichamelijk lijden tot hij te Hilversum den 30sten Maart 1892 overleed.

De leden van het Genootschap weten, hoeveel hart hij daarvoor had, en jaren lang in het Bestuur zitting had en tot de wetenschappelijke Commissie behoorde; hoe op zijn aandrang, en met zijn hulp, ook in het geldelijke, het Register tot stand kwam: en hoe hij, na zijn dood nog zijne belangstelling toonde door de, vooral bij ons nederig Genootschap, geheel ongewoone gift van 20.000 gulden.

Aan anderen overlatende in het algemeen zijn wetenschappelijken arbeid te herdenken, zij het hier mijne taak: iets te herinneren van hetgeen hij in de werken van het Genootschap nederlegde.

Vooreerst de bekroonde prijs-oplossingen, vroeger vermeld; zij betreffen: A. de verdeeling van den inhoud eens cylinders; B. de aardoppervlakte, begrepen tusschen een meridiaan en twee verschillende loxodromische lijnen; C. de kegelvor-

mige wig van WALLIS; D. een vierhoek, die aan bepaalde voorwaarden moet voldoen; E. het door eene plaat uitstroomend water; F. eene meetkundige plaats, die met de ellips te samenhangt.

Vervolgens komen zijne verhandelingen in het Nieuw Archief voor Wiskunde, en wel vooreerst over rekenkunde en getallenleer. In Deel V over een produkt van zes cijfers, waarvan de drie factoren elk uit twee cijfers bestaan, zóó dat elk der cijfers ook in het produkt voorkomt; in Deel X over het voorstellen van reine breuken door andere, waarvan in teller en noemer te zamen alle cijfers voorkomen; en in Deel XIX iets voor de oudste rekentafels der wereld. Wat kansrekening betreft, behandelde hij in Deel IX het geval, of eene rechte, die een cirkel snijdt, nog een anderen cirkel zal snijden; in Deel XVIII, of bij een willekeurige verdeeling eener rechte lijn, de segmenten tusschen twee gegeven grenzen liggen, of ook wel daaruit gesloten veelhoeken kunnen gevormd worden.

In Deel IX, XI en XV behandelde VAN DEN BERG het meetkundig verband, dat er bestaat tusschen de wortelpunten eener stelkundige vergelijking en haar afgeleide, waarbij hij in een Naschrift tot eene algemeen geldende stelling werd gevoerd.

Wat de geometria situs aangaat, behandelde hij in Deel XII het vraagstuk van de jumping frog, een der uit Amerika overgekomen puzzles; en in Deel XVI evene toovervierkanten.

De benaderings-constructien voor cirkelbogen hield hem twee maal bezig, eens die van MACQUORN RANKINE (Dl IV), dan die van CHR. NEHLS (Deel X).

In Deel XVI spreekt VAN DEN BERG over den driehoek, waarvan de drie hoekdeellijnen gegeven zijn, en in Deel XVII over het overeenkomstige geval, dat de deellijnen der drie supplementaire hoeken gegeven zijn.

In Deel X maakt hij opmerkzaam op eene afleiding van Prof. Dr. G. J. VERDAM van hoofdformulen der bolvormige driehoeksmeting; en in Deel XIV behandelde hij een vraagstuk over het twee aan twee gelijk zijn van de opstaande zijden van drie bolvormige driehoeken.

Over twee symmetrische groepen van drie cirkels en over twee

dergelijke groepen van drie rechten, met betrekking tot een gegeven driehoek schreef VAN DEN BERG in Deel VII; en over stelsels van twee cirkels in het platte vlak, of op den bol, of ook van coaxiale ellipsen in het platte vlak, zoo dat daarin en daarom een zelfde driehoek past, schreef hij in Deel XIV, en kwam nog in Deel XVI op dit onderwerp terug.

In Deel IX handelt hij over de onderlinge afwijking van den groot-cirkelboog en de loxodromische krommen tusschen twee nabijgelegen plaatsen op de bolvormige aarde; en in Deel XIX over zelf-wederkeerige poolkrommen.

Over een massiven driehoek rustende in een drievlakkigen hoek, en over de vergelijking der door drie gegeven richtlijnen bepaalde hyperboloïde, in verband met het evenwicht van vier krachten in de ruimte, schreef hij in Deel VI.

In Deel XIX behandelde hij nog een vraagstuk over driehoeks-netten, van belang voor de geodesie.

Voegt men nog hierbij de twee volgende opstellen:

Over coordinaten-stelsels voor cirkels in het platte vlak en voor bollen in de ruimte, en eene waardeerende beschouwing over een leerboek van C. L. LANDRÉ;

dan kan men uit deze slechts korte schets opmaken, hoe veelzijdig en tevens hoe diep ingrijpend zijne mathematische studien waren. Lang zal voorzeker nog F. J. VAN DEN BERG bij ons Genootschap in dankbare en waardeerende herinnering blijven. Moge slechts dit Genootschap zijne voetstappen blijven drukken en den nederigen, minzamen, belangstellenden werker tot voorbeeld nemen.

LIJST DER GESCHRIFTEN

VAN DEN HEER

F. J. VAN DEN BERG.

De afneming der duinen en van het strand langs de kusten der Noordzee in Nederland. (Verh. Kon. Inst. van Ing., 1855—56. blz. 138—149.

De inhouden te berekenen van de beide deelen, waarin een gewone cirkelvormige cylinder verdeeld wordt door een plat vlak, dat het bovenvlak volgens eene middellijn, en het grondvlak volgens eene gegevene koorde snijdt. (Archief II, 1866. blz. 1—9).

Het gedeelte der aardoppervlakte te berekenen, dat begrepen is tusschen een meridiaan en twee verschillende loxodromische krommen. (Archief II, 1866. blz. 10—22).

Door een gegeven punt van het oppervlak der kegelvormige wig van Wallis wordt een rakend plat vlak gebracht. Men vraagt, of dat rakende vlak het gebogen vlak al of niet snijdt; en zoo ja, deze doorsnede en hare voornaamste eigenschappen te vinden. (Archief II, 1866. blz. 23—86).

Ten einde daarvan eene toepassing op de theorie der gewelven te maken, begeert men eenen vierhoek te vinden, die aan de volgende voorwaarden, voldoet: 1°. twee over elkander staande zijden, (t. w. de zijden zelven, en niet hare verlengden) moeten eene gegevene kettinglijn, in twee gegevene punten van die kromme, rechthoekig snijden; 2°. de lijn, die de zwaartepunten van den vierhoek

en van den daarbinnen vallenden boog der kettinglijn vereenigt, moet evenwijdig met de as der kettinglijn loopen, en 3°. de vierhoek moet een gegeven inhoud hebben. (Archief II, 1866. blz. 129—151).

In eene verticaal staande dunne plaat is eene opening, de gedaante hebbende van een cirkel-segment, welks koorde horizontaal loopt. Die plaat keert een watermassa, waarvan de standvastige waterspiegel te weinig boven de opening verheven is, om de drukhoogte boven het zwaartepunt der opening als eene gemiddelde in rekening te mogen brengen. Men vraagt de hoeveelheid water te vinden, die in een bepaalden tijd door deze opening uitvloeit? De oplossing van deze vraag verlangt men op een voorbeeld in getallen toegepast te zien. (Archief II, 1866. blz. 152—188).

De vergelijking en de voornaamste eigenschappen te vinden der kromme lijn, die de meetkunstige plaats is van de snijpunten der loodlijnen, door de uiteinden van de elkander toegevoegde middellijnen eener ellips, loodrecht op die middellijnen getrokken. (Archief II, 1866. blz. 189—216).

Over de berekening van liggers, doorgaande over meer dan twee steunpunten, met flauw gebogen lengteas, veranderlijke dwarsdoorsnede en willekeurige belasting. (Verh. van het Kon. Inst. v. Ing., 1872—73. blz. 275—283).

Over het draagvermogen van een aan beide einden bevestigd prisma. (Verh. Kon. Inst. v. Ing., 1874—75. blz. 219—236).

Over de onderlinge afwijkingen van de geodetische lijn en van de wederzijdsche vlakke normale doorsneden tusschen twee nabij gelegene punten van een gebogen oppervlak. (Versl. en meded. Kon. Akad. Amsterdam, Deel X, 2e Reeks, 1875. blz. 1—45, 1 pl.).

Over de grondformules voor de doorbuiging van een veerkrachtig staafvormig lichaam. (Verh. Kon. Inst. v. Ing., 1875—76. blz. 97—111, 1 pl.).

Over de benaderde rectificatie van een cirkelboog. (N. Arch. v. Wisk. IV, 1878. blz. 200—204).

Bijdrage tot de oplossing van een vraagstuk uit de getallenleer. (N. Arch. v. Wisk. V, 1879. blz. 47—57).

Ontwikkeling van eenige algebraïsche en van daarmede gelijkvormige goniometrische identiteiten. (Versl. en meded. Kon. Akad. Amsterdam, Deel XIV, 2e Reeks, 1879. blz. 340—359).

Oplossing van de 3e prijsvraag voor het jaar 1878. Over een massieven driehoek rustende op een drievlakkigen hoek. (N. Arch. v. Wisk. VI, 1880. blz. 67—97).

Over de vergelijking der door drie gegeven richtlijnen bepaalde hyperboloïde in verband met het evenwicht van vier krachten in de ruimte. (N. Arch. v. Wisk. VI, 1880. blz. 183—195).

Over periodieke terugloopende betrekkingen tusschen de coëfficienten in de ontwikkeling van functiën, meer in het bijzonder tusschen de Bernoulli'aansche en ook tusschen eenige daarmede verwante coëfficienten. (Versl. en meded. Kon. Akad. Amsterdam, Deel XVI, 2e Reeks, 1880. blz. 74—176).

Over twee met betrekking tot een driehoek symmetrische groepen van drie cirkels, en voor twee dergelijke groepen van drie rechte lijnen. (N. Arch. v. Wisk. VII, 1881. blz. 78—90).

Over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleiden. Naschrift. (N. Arch. v. Wisk. IX, 1882. blz. 1—14, 60).

Over de onderlinge afwijking van den groote — cirkelboog en de loxodronische krommen tusschen twee nabijgelegen plaatsen op de bolvormige aarde. (N. Arch. v. Wisk. IX, 1882. bl. 15—31).

Over een meetkundig vraagstuk van kansberekening. (N. Arch. v. Wisk. IX, 1882. blz. 32—59.)

Het leven en de werken van de Gen.-Majoor Dr. J. P. Delprat. (Notulen Kon. Inst. van Ing. 1882—1883. Bijl. 23. blz. 10—56).

Over de benaderde rectificatie van een cirkelboog. (N. Arch. v. Wisk. X, 1884. blz. 186—192).

Over eene onjuiste beschouwing in G. J. VERDAM's Handboek der spherische trigonometrie. (N. Arch. v. Wisk. X, 1884. blz. 193—198).

Over een rekenkundig vraagstuk. (N. Arch. v. Wisk. X, 1884. blz. 198—202).

Over het meetkundig verband tusschen de wortelpunten eener vergelijking en die van haar afgeleide. (N. Arch. v. Wisk. XI, 1884. blz. 153—187).

Over zeker spel. (N. Arch. v. Wisk. XII, 1886. blz. 38—59).

Over de graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen. (Versl. en meded. Kon. Akad. Amsterdam, Deel IV, 3e Reeks, 1887. blz. 196—252).

Over een vraagstuk van bolvormige driehoeksmeting. (N. Arch. v. Wisk. XIV, 1888. bl. 78—94).

Over zoodanige stelsels van twee cirkels in het platte vlak of op den bol, of ook van twee coaxiale ellipsen in het platte vlak, dat daarin en daarom een zelfde veelhoek past. (N. Arch. v. Wisk. XIV, 1888. blz. 95—116 125—192).

De constructie-figuur voor de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen beschouwd als configuratie. (Versl. en meded. Kon. Akad. Amsterdam, Deel V, 3e Reeks, 1888. blz. 267—288).

Eenige formules voor de berekening van de BERNOULLI'aansche en van de tangenten-coëfficienten. (Versl. en meded. Kon. Akad. Amsterdam, Deel V, 3e Reeks, 1888. blz. 358—397.

Nogmaals over de BERNOULLI'aansche coëfficienten. (Versl. en meded. Kon. Akad. Amsterdam, Deel VI, 3e Reeks, 1889. blz. 265—276).

Over het theorema der drie reactiën bij een doorgaanden ligger met steunpunten op ongelijke afstanden. (Verh. Kon. Inst. van Ing., 1889—90. blz. 69—75,

Nogmaals over afgeleide wortelpunten (N. Arch. v. Wisk. XV, 1888. blz. 100—139).

Naschrift. (N. Arch. v. Wisk. XV, 1888. blz. 139—164).

Iets over tovervierkanten. (N. Arch. v. Wisk. XVI, 1889. blz. 1—31).

Naschrift over stelsels van twee cirkels of twee kegelsneden, waarin en waarom een zelfde veelhoek past. (N. Arch. v. Wisk. XVI, 1889. blz. 160—178).

Over de bepaling van een driehoek, waarin de lengten der drie hoekdeellijnen gegeven zijn. (N. Arch. v. Wisk. XVI, 1889. blz. 179—199).

Over de bepaling van een driehoek, waarvan de deellijnen der drie supplementaire hoeken gegeven zijn. (N. Arch. v. Wisk. XVII, 1890. bl. 191—205).

Over de kans dat, bij willekeurige verdeeling van eene gegeven rechte lijn, de segmenten tusschen gegeven grenzen liggen. (N. Arch. v. Wisk. XVIII, 1891. blz. 42—62).

Over de kans dat, bij willekeurige verdeeling van een gegeven rechte lijn, uit de segmenten gesloten veelhoeken kunnen worden gevormd. (N. Arch. v. Wisk. XVIII, 1891. blz. 63—118).

Over zelf-wederkeerige poolkrommen. (N. Arch. v. Wisk. XIX, 1891. blz. 80—97).

Boekaankondiging. Nomographie, les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application. Par Maurice d'Ocagne, Ingenieur des ponts et chaussées. Paris, Gauthier Villars. 1891. in-8°. 96 pages, VIII planches. (Verh. Kon. Inst. van Ing. 1891—92. blz. 224—234).

Over een vraagstuk, dat in de geodesie van dienst kan zijn. (N. Arch. v. Wisk. XIX, 1892. blz. 151—187).

De oudste rekentafels der wereld. (N. Arch. v. Wisk. XIX, 1892. blz. 211—215).

D. B. d. H.

OVER COÖRDINATEN-STELSELS VOOR CIRKELS IN HET PLATTE VLAK EN VOOR BOLLEN IN DE RUIMTE,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

In den 94^en^ Band der Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 2^e^ Abtheilung, November 1886, Seite 786—793, heeft de hoogleeraar Dr. P. H. SCHOUTE te Groningen onder den titel: »Ein Raumcoordinatensystem der Kreise einer Ebene" een bijzonder coördinatenstelsel voor de in eenzelfde vlak liggende cirkels ontwikkeld. Hij grondt zich daarbij op de opmerking, dat de vergelijking van elken cirkel van het vlak onder den vorm $U + \lambda a_1^2 + \mu b_1^2 + \nu c_1^2 = 0$ lineair is uit te drukken in de vergelijking $U = 0$ van den omgeschreven cirkel van den aangenomen assendriehoek A B C, en in de vergelijkingen $a_1^2 = 0$, $b_1^2 = 0$, $c_1^2 = 0$ van de als oneindig kleine cirkels beschouwde hoekpunten van dezen driehoek; en denkt zich de drie coëfficienten λ, μ, ν, die den willekeurigen cirkel alzoo kenmerken, als rechthoekige coördinaten van een punt in de ruimte, dat dan als beeld van dien cirkel dienst doet. In verschillende gevallen wordt nu onderzocht wat, voor gegeven verband van twee of meer cirkels, het overeenkomstige verband hunner beeldpunten is.

Ik stel mij voor, in deze bijdrage in de eerste plaats eenige beschouwingen en formulen te geven, die zich min of meer rechtstreeks aan het omschreven onderwerp aan-

sluiten. Daarna het bedoelde coördinatenstelsel als bijzonder geval af te leiden uit een meer algemeen voor in één vlak liggende cirkels, welk meer algemeen stelsel men geheel kan ontwikkelen op het voetspoor van wat door den hoogleeraar Dr. Gino Loria te Genua voor bollen in de ruimte geleverd is. En ten slotte iets bij te voegen omtrent het door den Heer Schoute aan het eind van zijn artikel aangevoerde ten aanzien van een bijzonder coördinatenstelsel voor bollen.

Indien beurtelings eene der loopende trilineaire coördinaten x, y, z van een willekeurig punt P wordt geëlimineerd tusschen de vergelijking $U = y\,z\sin A + z\,x\sin B + x\,y\sin C = 0$ van den omgeschreven cirkel van den assendriehoek A B C en de vergelijking $G = x\sin A + y\sin B + z\sin C = 0$ van de lijn in het oneindige, komt men, zooals in den aanhef van het genoemde artikel wordt gezegd, achtereenvolgens neder op de vergelijkingen $a_1^2 = y^2 + z^2 + 2\,y\,z\cos A = 0$, $b_1^2 = z^2 + x^2 + 2\,z\,x\cos B = 0$, $c_1^2 = x^2 + y^2 + 2\,x\,y\cos C = 0$ van de als puntcirkels beschouwde hoekpunten A, B, C. Drukt men nu op grond hiervan de functien a_1^2, b_1^2, c_1^2 (dat zijn de vierkanten der zijden van den voetpuntsdriehoek van P) in de beide functien U en G uit, waarvan de eerste den dubbelen inhoud $2\,I_1$ van dien voetpuntsdriehoek, de tweede den inhoud I van den assendriehoek A B C zelf, gedeeld door den straal R van diens omgeschreven cirkel, voorstelt; dan heeft men daartoe bij voorbeeld $U\sin A = y\,z\sin^2 A +$ $+ (z\sin B + y\sin C).(G - y\sin B - z\sin C)$, of, gelet op

$$\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{4\,R^2} = -\frac{2\,b\,c\cos A}{4\,R^2} =$$

$$= -2\sin B.\sin C.\cos A,$$

$U\sin A = -(y^2 + z^2 + 2\,y\,z\cos A)\sin B.\sin C + G\,(y\sin C +$ $+ z\sin B)$, dat is

$$a_1^2\sin B.\sin C = -\,U\sin A + G\,(y\sin C + z\sin B),$$

en dus evenzoo

$$b_1^2\sin C.\sin A = -\,U\sin B + G\,(z\sin A + x\sin C),\qquad (1)$$

en

$$c_1^2\sin A.\sin B = -\,U\sin C + G\,(x\sin B + y\sin A).$$

In deze formulen zijn vooreerst de factoren $y \sin C + z \sin B$, $z \sin A + x \sin C$, $x \sin B + y \sin A$, gelijk nul gesteld, de vergelijkingen van de radicale assen der cirkels U en a_1^2, U en b_1^2, U en c_1^2, dat is naar behooren van de raaklijnen van den omgeschreven cirkel U in de hoekpunten A, B, C. Ten andere doen dezelfde formulen, gesubstitueerd in de vergelijking van den willekeurigen cirkel $U + \lambda a_1^2 + \mu b_1^2 + \nu c_1^2 = 0$, deze vergelijking, uitgedrukt in U en G alleen, den vorm $U(\sin A . \sin B . \sin C - \lambda \sin^2 A - \mu \sin^2 B - \nu \sin^2 C) + G\{\lambda \sin A . (y \sin C + z \sin B) + \mu \sin B . (z \sin A + x \sin C) + \nu \sin C . (x \sin B + y \sin A)\} = 0$ aannemen, en daardoor den hier optredenden factor, waarmede G is aangedaan, kennen als radicale as van dien cirkel met den cirkel U; en wel onder den hier beschreven vorm, met $\lambda \sin A$, $\mu \sin B$ en $\nu \sin C$ namelijk tot coëfficienten, het meest onmiddellijk als trilineaire vergelijking ten opzichte van de drie evengenoemde raaklijnen van U. Zou echter een willekeurige cirkel door de vergelijking $U + G(l x + m y + n z) = 0$ en dus door de volstrekte waarden der coëfficienten l, m, n, wier verhoudingen de radicale as bepalen, gegeven zijn, en wilde men dan diens coördinaten λ, μ, ν berekenen; dan leert de evenredigstelling der coëfficienten van Gx, Gy, Gz en van U in beide vormen van vergelijking — na de coëfficienten in de eerste vergelijking liefst eerst nog door $\sin A . \sin B . \sin C$ gedeeld te hebben — dat $\dfrac{\mu + \nu}{l \sin A} = \dfrac{\nu + \lambda}{m \sin B} = \dfrac{\lambda + \mu}{n \sin C} =$

$$= \frac{1 - \lambda \dfrac{\sin A}{\sin B . \sin C} - \mu \dfrac{\sin B}{\sin C . \sin A} - \nu \dfrac{\sin C}{\sin A . \sin B}}{1}$$

moet zijn, en dus ook gelijk aan hetgeen men verkrijgt door, — ter eliminatie opvolgend van μ en ν, van ν en λ, van λ en μ, en eindelijk van λ, μ en ν tegelijk — de som der produkten van de tellers dezer vier gelijke breuken met $-1, 1, 1, 0$, of met $1, -1, 1, 0$, of met $1, 1, -1, 0$, of eindelijk met $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$, 1, te deelen telkens door de overeenkomstige som voor de noemers, als wanneer men onmiddellijk onder den vorm $\dfrac{2\lambda}{-l \sin A + m \sin B + n \sin C} =$

$$= \frac{2\mu}{l \sin A - m \sin B + n \sin C} = \frac{2\nu}{l \sin A + m \sin B - n \sin C} =$$

$$= \frac{1}{l \cos A + m \cos B + n \cos C + 1}$$ de verlangde waarden van λ, μ, ν vóór zich heeft.

Op te merken valt ook dat, terwijl a_1^2, b_1^2, c_1^2 ieder in U en G konden worden uitgedrukt, wederkeerig de dubbele inhoud $U = 2 I_1$ van den voetpuntsdriehoek, zoo al niet lineair, toch als vierkantswortel is uit te drukken uitsluitend in de vierkanten a_1^2, b_1^2, c_1^2 zijner zijden. Dit wordt dan ook bevestigd bij voorbeeld door de volgende herleiding.

$$\begin{aligned} 16 I_1^2 &= 4 U^2 = 4 (y z \sin A + z x \sin B + x y \sin C)^2 = \\ &= 4 \{(x + z \cos B) y \sin C + (x + y \cos C) z \sin B\}^2 = \\ &= 4 \{(x + z \cos B)^2 + z^2 \sin^2 B\} \{(x + y \cos C)^2 + y^2 \sin^2 C\} - \\ &\quad - 4 \{(x + z \cos B)(x + y \cos C) - y z \sin B \,.\, \sin C\}^2 = \\ &= 4 b_1^2 c_1^2 - (b_1^2 + c_1^2 - a_1^2)^2 = - a_1^4 - b_1^4 - c_1^4 + 2 b_1^2 c_1^2 + \\ &\quad + 2 c_1^2 a_1^2 + 2 a_1^2 b_1^2 = (a_1 + b_1 + c_1)(- a_1 + b_1 + c_1) \,. \\ &\quad . (a_1 - b_1 + c_1)(a_1 + b_1 - c_1), \end{aligned}$$

waardoor men op de bekende formule voor den driehoeksinhoud nederkomt.

Behalve op deze beteekenis van U als dubbele driehoeksinhoud is het goed bedacht te zijn op de omstandigheid, dat U — eene zoodanige tweedemachtsfunctie van de coördinaten x, y, z zijnde, dat haar verdwijnen de punten van den omschreven cirkel van $\triangle$ ABC kenmerkt — noodwendig evenredig aan de macht van het beschouwde punt P ten aanzien van dezen cirkel moet wezen. Men is dus, noemende d den afstand van P tot het middelpunt en k een te bepalen getallen-coëfficient, gerechtigd in het algemeen voor de bedoelde macht te stellen $d^2 - R^2 = \frac{U}{k}$, en kan dan voor de uitrekening van k volstaan met de substitutie hierin voor eenig bijzonder punt, zooals bij voorbeeld het midden van de zijde $BC = a$; waarvoor de macht $d^2 - R^2 = - \frac{a^2}{4}$ bedraagt, en de coördinaten $x = 0$, $y = \frac{a}{2} \sin C$, $z = \frac{a}{2} \sin B$, dus $U = y z \sin A = \frac{a^2}{2} \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$; zoodat $k =$

$= - \sin A . \sin B . \sin C$ en in het algemeen $d^2 - R^2 = - \dfrac{U}{\sin A . \sin B . \sin C}$ blijkt te zijn. Nog meer onmiddellijk blijkt evenzeer, dat de machten van het willekeurige punt P of (x, y, z) ten opzichte der drie puntcirkels A, B, C, dat zijn hier de vierkanten der afstanden PA, PB, PC, niet alleen evenredig zijn aan de functien a_1^2, b_1^2, c_1^2, maar meer bepaaldelijk gelijk aan $\dfrac{a_1^2}{\sin^2 A}$, $\dfrac{b_1^2}{\sin^2 B}$, $\dfrac{c_1^2}{\sin^2 C}$.

Keeren wij tot de formule (1) terug. De som harer producten met x, y, z geeft

$$x a_1^2 \sin B . \sin C + y b_1^2 \sin C . \sin A + z c_1^2 \sin A . \sin B = G U, \quad (2)$$

en op grond hiervan kan nu de even gevonden macht van P ten opzichte van den cirkel ABC, — indien men let op $\sin A . \sin B . \sin C = \dfrac{abc}{8 R^3} = \dfrac{I}{2 R^2}$, op $G = \dfrac{I}{R}$ en op de almede reeds vermelde machten ten opzichte van de puntcirkels A, B, C —, niet alleen onder de vormen

$$d^2 - R^2 = - \frac{U}{\sin A . \sin B . \sin C} = - \left(\frac{y z}{\sin B . \sin C} + \right.$$

$$\left. + \frac{z x}{\sin C . \sin A} + \frac{x y}{\sin A . \sin B} \right) = - \frac{2 I_1}{\sin A . \sin B . \sin C} = - \frac{4 R^2 I_1}{I},$$

maar tevens onder de vormen

$$d^2 - R^2 = - \frac{x a_1^2 \sin B . \sin C + y b_1^2 \sin C . \sin A + z c_1^2 \sin A . \sin B}{G \sin A . \sin B . \sin C} =$$

$$= - R \frac{x . \mathrm{PA}^2 \sin A + y . \mathrm{PB}^2 \sin B + z . \mathrm{PC}^2 \sin C}{I} =$$

$$= - \frac{\mathrm{PA}^2 . \mathrm{BCP} + \mathrm{PB}^2 . \mathrm{CAP} + \mathrm{PC}^2 . \mathrm{ABP}}{I}$$

geschreven worden. Neemt men in aanmerking, dat het punt P een geheel willekeurigen stand buiten, op, of binnen den cirkel ABC kan hebben, en noemt men D een der beide bestaanbare, samenvallende of onbestaanbare raakpunten van uit P, dan kan deze laatste vorm, geschreven als $\mathrm{PA}^2 . \mathrm{BCP} + \mathrm{PB}^2 . \mathrm{CAP} + \mathrm{PC}^2 . \mathrm{ABP} + \mathrm{PD}^2 . \mathrm{ABC} = 0$, bovendien worden opgevat als uitdrukking van eene eigenschap van drie willekeurige punten A, B, C van een cirkel in verband met eenig ander punt P van diens vlak en met

het raakpunt D van uit P; eene eigenschap, die zich nauw aansluit aan degene, die men onder den vorm $PA^2 . BCD - PB^2 . CDA + PC^2 . DAB - PD^2 . ABC = 0$ onder anderen besproken vindt op blz. 225 van Dr. R. BALTZER, Theorie und Anwendung der Determinanten, 3e Aufl., 1870, als geldig voor vier willekeurige punten A, B, C, D eens cirkels en voor eenig punt P van zijn vlak (of zelfs, zie blz. 226 boven, daarbuiten). Wordt voor P dan ook het willekeurige punt D van den cirkel zelf genomen, dan vallen, — indien men, wat de teekens betreft, let op $CDA = -CAP$ — beide betrekkingen samen in déze enkele, almede bij BALTZER vermelde, voor vier punten A, B, C, D van een cirkel, namelijk $DA^2 . BCD + DB^2 . CAD + DC^2 . ABD = 0$; terwijl deze laatste nu tevens blijkt beschouwd te kunnen worden als bijzonder geval van eene gelijkvormige, almede van drie termen, voor drie punten A, B, C van een cirkel, voor eenig punt P van zijn vlak, en voor het midden Q van de raaklijn PD, namelijk $PA^2 . BCQ + PB^2 . CAQ + PC^2 . ABQ = 0$, welke betrekking als halve som van de beide eerste te voorschijn komt. En overigens kan ook die allereerste betrekking op zich zelve, indien men zooals bij BALTZER ten opzichte van een rechthoekig door P gelegd assenstelsel, het punt A noemt (x, y), $B (x_1, y_1)$, $C (x_2, y_2)$, $D (x_3, y_3)$ — zoodat niet alleen, gelijk aldaar, ieder dier punten aan dezelfde cirkel-vergelijking $x^2 + y^2 = a + bx + cy$ moet voldoen, maar nu daarenboven het punt D bepaaldelijk onderworpen moet worden aan de voorwaarde van raakpunt uit P te zijn — in denzelfden geest als daar ter plaatse wordt bewezen. Immers, die voorwaarde wordt uitgedrukt doordien de macht van den oorsprong P, dat is het vierkant van den afstand PD, tevens gelijk moet zijn aan hetgeen, waarin de macht van een willekeurig punt (x, y), dat is het eerste lid van vorenstaande op nul herleide vergelijking, overgaat voor $(x = 0, y = 0)$; die voorwaarde is derhalve $x_3^2 + y_3^2 = -a$; en stelt men deze bijzondere vergelijking voor D nu in de plaats van diens aanvankelijk meer algemeene vergelijking $x_3^2 + y_3^2 = a + bx_3 + cy_3$, dan geeft weder de eliminatie der coëfficienten a, b, c tusschen de vier thans beschikbare ver-

gelijkingen de betrekking $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2+y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, dat is

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix} + (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ of werkelijk}$$

$$PA^2 . BCP + PB^2 . CAP + PC^2 . ABP + PD^2 . ABC = 0.$$

Ook uit statische gronden kan diezelfde betrekking, of zelfs eene meer algemeene, worden afgeleid. Denkt men zich een willekeurig aantal met massa's m aangedane punten in één vlak; noemt men r hunne afstanden tot eenig punt O van het vlak, r' tot hun gemeenschappelijk zwaartepunt Z, z tot eene door Z loodrecht op O Z aangebrachte as, en a den afstand O Z zelf; dan geldt voor ieder punt m in het bijzonder $r^2 = r'^2 + a^2 + 2\,a\,z$; en dan geeft de som der producten van deze betrekkingen ieder met de overeenkomstige massa m zelf, (indien men daarbij let op $\Sigma\, m\, z = 0$) de herleidingsformule voor polaire traagheidsmomenten $\Sigma\, m\, r^2 = \Sigma\, m\, r'^2 + a^2\, \Sigma\, m$. Voert men nu meer bepaaldelijk de onderstelling in, dat alle punten m op een cirkel met O tot middelpunt liggen, zoodat ook r voor allen eene gemeenschappelijke waarde heeft, dan komt $a^2 - r^2 = -\dfrac{\Sigma\, m\, r'^2}{\Sigma\, m}$, dat is in woorden: de macht van eenig punt Z ten opzichte van een cirkel is gelijk aan het negatieve vierkant van den traagheidsarm van een willekeurig aantal willekeurige punten van den cirkel ten opzichte van Z, mits deze punten met zoodanige massa's zijn aangedaan, dat Z zelf hun zwaartepunt is. Bepaalt het aantal massa's zich tot drie, in A, B en C, dan moeten, zooals bekend is, die massa's daartoe evenredig aan de driehoeken B C Z, C A Z en A B Z zijn, en men komt, de letter Z door P vervangende, weder op de meergenoemde betrekking neder.

Het vorenstaande gold voor een willekeurig, niet op den omgeschreven cirkel A B C liggend, punt P. Neemt men dit

punt meer in het bijzonder ergens in D op dien cirkel zelf, dan vereenvoudigt zich, zooals reeds opgemerkt, de gevonden betrekking tot $DA^2.BCD + DB^2.CAD + DC^2.ABD = 0$; maar dan verdient het tevens opmerking, dat deze betrekking door eene kleine vervorming zoowel de stelling van Ptolemeus voor den vierhoek als die van R. Simson voor den driehoek in den cirkel levert, en dus als het ware een band tusschen deze beide stellingen legt. Nemen wij, om de gedachte te bepalen, aan, dat de vier punten A, B, C, D in deze rondgaande orde op elkander volgen, zoodat AC en BD de beide diagonalen van den ingeschreven vierhoek zijn — voor elke andere mogelijke volgorde kan men blijkbaar met eene dienovereenkomstige letterverwisseling volstaan — dan heeft driehoek CAD tegengestelden zin, en dus ook teeken, van de driehoeken BCD en ABD, zoodat men, de betrekking deelende door $\frac{1}{2} DA.DB.DC$, in dat geval verkrijgt $DA \, sin \, CBD - DB. sin \, CDA + DC. sin \, BDA = 0$; hetgeen vooreerst, vermenigvuldigd met $2R$, geeft $DA.BC - - DB.CA + DC.AB = 0$ volgens Ptolemeus, ten andere – lettende op $sin \, CDB = sin \, CAB$, $sin \, CDA = sin \, ABC$, $sin \, BDA = sin \, BCA$ en op de reeds boven ter gelegenheid der machten van P (thans D) voor de puntcirkels A, B, C vermelde waarden $DA = \frac{a_1}{sin \, A}$, $DB = \frac{b_1}{sin \, B}$, $DC = \frac{c_1}{sin \, C}$ — geeft $a_1 - b_1 + c_1 = 0$ als uitdrukking van Simson's stelling. Dit een en ander staat onmiddellijk hiermede in verband, dat de vergelijking van den omgeschreven cirkel ABC, die in de trilineaire coördinaten x, y, z was $U = yz \, sin \, A + + zx \, sin \, B + xy \, sin \, C = 0$, reeds boven in de zijden a_1, b_1, c_1 van den voetpuntsdriehoek als coördinaten bleek te zijn $4U^2 = (a_1 + b_1 + c_1)(-a_1 + b_1 + c_1)(a_1 - b_1 + c_1)(a_1 + b_1 - c_1) = 0$, en dus bovendien thans in de afstanden DA, DB, DC als tripolaire coördinaten kan worden voorgesteld door $64R^4U^2 = (a.DA + b.DB + c.DC)(-a.DA + b.DB + c.DC). .(a.DA - b.DB + c.DC)(a.DA + b.DB - c.DC) = 0$.

Ten slotte van deze afdeeling van mijn opstel wil ik er in het voorbijgaan op wijzen, dat uit de figuur, ontstaande door, niet voor een willekeurig punt P, maar bepaaldelijk

voor het hoogtepunt H van een driehoek A B C, den voetpuntsdriehoek $A_1 B_1 C_1$ te construeeren, zich onmiddellijk aanschouwelijke bewijzen laten aflezen voor eenige formulen tusschen drie hoeken A, B, C, die, zooals in een driehoek te zamen 180° uitmaken. Men heeft dan namelijk $\frac{A B_1}{c} =$ $= \cos A = \frac{A C_1}{b_1}$, dus ook $= \frac{B C_1}{a}$, dat is $a_1 = a \cos A =$ $= R \sin 2 A$, $A H = \frac{a_1}{\sin A} = 2 R \cos A$, $H A_1 = B H \cos C =$ $= C H \cos B = 2 R \cos B \,.\, \cos C$, $A A_1 = b \sin C = c \sin B =$ $= 2 R \sin B \,.\, \sin C$; en overeenkomstige waarden ten aanzien van het hoekpunt B of C in plaats van A. Uit $A H = H A_1 +$ $+ A A_1$ blijkt alzoo $\cos A = -\cos B \,.\, \cos C + \sin B \,.\, \sin C$; uit $\frac{A B_1 C_1}{\cos^2 A} = \frac{B C_1 A_1}{\cos^2 B} = \frac{C A_1 B_1}{\cos^2 C} = I = \frac{1}{2} b c \sin A =$ $= 2 R^2 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$ en $I_1 = \frac{1}{2} b_1 c_1 \sin 2 A = \frac{1}{2} A^2 \sin 2 A \,.$ $. \sin 2 B \,.\, \sin 2 C = 2 I \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C$, in verband met $I - A B_1 C_1 - B C_1 A_1 - C A_1 B_1 - I_1 = 0$ blijkt $1 - \cos^2 A -$ $- \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C = 0$; uit $H B_1 C_1 =$ $= \frac{1}{2} \,.\, 2 R \cos C \,.\, \cos A \,.\, 2 R \cos A \,.\, \cos B \,.\, \sin (180° - A) =$ $= R^2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C \,.\, \sin 2 A$, dus $I_1 = H B_1 C_1 + H C_1 A_1 +$ $+ H A_1 B_1 = R^2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C \,(\sin 2 A + \sin 2 B + \sin 2 C)$, gelijk gesteld aan de zoo even reeds gevonden I_1, blijkt $\sin 2 A + \sin 2 B + \sin 2 C = 4 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$ (die ons zoo dadelijk van dienst zal zijn); uit $H B C + H C A + H A B = I$ blijkt $\sin A \,.\, \cos B \,.\, \cos C + \sin B \,.\, \cos C \,.\, \cos A + \sin C \,.\, \cos A \,.\, \cos B =$ $= \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$ of $\cot B \,.\, \cot C + \cot C \,.\, \cot A + \cot A \,.\, \cot B = 1$; uit $a_1^2 - b_1^2 + c_1^2 - 2 b_1 c_1 \cos (180° - 2 A)$ blijkt $\sin^2 2 A =$ $= \sin^2 2 B + \sin^2 2 C + 2 \sin 2 B \,.\, \sin 2 C \,.\, \cos 2 A$; enz.

Thans overgaande tot de bepaling van middelpunt en straal van den door de algemeene vergelijking $U + \lambda a_1^2 +$ $+ \mu b_1^2 + \nu c_1^2 = 0$ voorgestelden cirkel, zal ik mij daarbij eerst eenige uitweiding veroorloven ten aanzien van den afstand d van twee in trilineaire coördinaten gegeven punten

P of (x, y, z) en P′ of (x', y', z'). Die afstand komt voor als middellijn van den omgeschreven cirkel van een driehoek, hebbende twee der drie overeenkomstige coördinatenverschillen, bij voorbeeld $y - y'$ en $z - z'$, tot zijden, en tot ingesloten hoek het supplement van den bijbehoorenden hoek A van den assendriehoek; zoodat men ter bekorting invoerende $X = x - x'$, $Y = y - y'$, $Z = z - z'$, heeft

$$d^2 = \frac{Y^2 + Z^2 + 2\,YZ\cos A}{\sin^2 A} = \frac{Z^2 + X^2 + 2\,ZX\cos B}{\sin^2 B} =$$

$$= \frac{X^2 + Y^2 + 2\,XY\cos C}{\sin^2 C},$$ waarin bovendien wegens $\frac{I}{R} =$ $= x\sin A + y\sin B + z\sin C = x'\sin A + y'\sin B + z'\sin C$ de drie verschillen X, Y, Z samenhangen volgens $X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = 0$. Maar juist de gelijkvormigheid der drie hier in de tellers van d^2 voorkomende uitdrukkingen met de vroeger door de notatien a_1^2, b_1^2, c_1^2 aangeduide, gevoegd bij de gelijkvormigheid der laatst geschreven en thans gelijk nul zijnde uitdrukking met de vroegere G genoemde, brengt tot het besluit, dat men ook thans van de formulen (1) — die in wezenlijkheid identiteiten zijn — partij kan trekken om d^2 onder nog anderen, meer symmetrischen vorm te brengen. Voor $G = 0$ namelijk leveren die identiteiten de vereenvoudigde betrekkingen $\frac{a_1^2}{\sin^2 A} = \frac{b_1^2}{\sin^2 B} = \frac{c_1^2}{\sin^2 C} =$ $= -\frac{U}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}$, en op dien grond mag dus ook voor het tegenwoordig onderwerp geschreven worden

$$d^2 = -\frac{YZ\sin A + ZX\sin B + XY\sin C}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C};$$ zooals ten overvloede, onafhankelijk van dezelfde identiteiten, bevestigd wordt door de som van $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ maal de drie tellers van d^2, verminderd met den in ons geval nul bedragenden vorm $\frac{(X\sin A + Y\sin B + Z\sin C)^2}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}$, te deelen door de overeenkomstige som voor de noemers, namelijk $\sin A . \cos A + \sin B \,.\, \cos B + \sin C \,.\, \cos C = 2\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$. En tevens kan men in plaats van symmetrisch in de drie producten YZ, ZX, XY, de waarde van d^2 ook symmetrisch in de

drie vierkanten X^2, Y^2, Z^2 uitdrukken, door bij den laatst gevonden teller slechts $(X \sin A + Y \sin B + Z \sin C)(X \cos A + + Y \cos B + Z \cos C) = 0$ te voegen, waardoor na herleiding komt $d^2 = \frac{X^2 \sin 2A + Y^2 \sin 2B + Z^2 \sin 2C}{2 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}$.

Ook meetkundig kan men de eerste, en statisch de tweede dezer symmetrische formulen voor d^2 afleiden. Nemen wij eens aan, dat de punten P en P′ zoodanigen betrekkelijken stand hebben, dat van hunne drie coördinatenverschillen X, Y, Z, die blijkens het verband $X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0$, niet alle drie gelijke teekens kunnen hebben, het eerste en het derde bij voorbeeld positief zijn, het tweede negatief — bij anderen stand zou in ieder geval de uitkomst der redeneering dezelfde blijken — dan komen die verschillen vóór als de projectien PQ, —PR, PS van den afstand PP′ $= d$ op de loodlijnen op de zijden a, b, c van den assendriehoek; zoodat in rondgaande volgorde de punten P, Q, R, S de hoekpunten zijn van een in den cirkel met P P′ tot middellijn passenden vierhoek. De beschouwing der figuur geeft dan $d = \frac{RS}{\sin A} = \frac{SQ}{\sin B} = \frac{QR}{\sin C}$, zoodat vooreerst het meergenoemde verband $X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0$, term voor term met één dezer drie gelijke breuken vermenigvuldigd, op nieuw de stelling van PTOLEMEUS onder den vorm $PQ \,.\, RS - PR \,.\, SQ + PS \,.\, QR = 0$ doet terugvinden; maar ten andere ook $d^2 = \frac{RS \,.\, SQ}{\sin A \,.\, \sin B} = \frac{2\,QRS}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C} =$
$$= \frac{2(PRS - PQS + PQR)}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C} = \frac{YZ \sin A + ZX \sin B + XY \sin C}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}$$
blijkt te zijn, als zoo even. En wat nu de statische afleiding der andere formule voor d^2 betreft, daartoe kan de reeds boven aangewende formule $\Sigma\, m\, r^2 = \Sigma\, m\, r'^2 + a^2\, \Sigma\, m$ voor polaire traagheidsmomenten dienen, namelijk door alle punten m op een cirkel, niet zooals toen met O, maar thans met hun eigen zwaartepunt Z tot middelpunt, te onderstellen, dat is door r' standvastig aan te nemen, waardoor de formule wordt $\Sigma\, m\, r^2 = (r'^2 + a^2)\, \Sigma\, m$. Bepaalt weder het aantal massieve punten zich tot drie, in Q, R en S; worden,

als M het middelpunt van den omgeschreven cirkel, dat is het midden van P P′ is, hunne massa's evenredig aan M R S, M S Q, M Q R, dat is aan $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ ondersteld, zoodat werkelijk M tevens het zwaartepunt is; en wordt het punt O thans in P genomen; dan is zoowel r' als a gelijk $\frac{d}{2}$, en er komt $X^2 \sin 2A + Y^2 \sin 2B + Z^2 \sin 2C = \frac{d^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$, gevende voor d^2 weder dezelfde waarde als boven.

Eindelijk herinner ik er aan, dat op blz. 121 van mijn opstel: »Nogmaals over afgeleide wortelpunten" in Deel XV, Stuk 1, 1888, blz. 100—164, van dit Tijdschrift, behoudens andere notatien, de formule voor den afstand van twee punten — door uit $\frac{I}{R} = x \sin A + y \sin B + z \sin C = x' \sin A + y' \sin B + z' \sin C$ af te leiden $\frac{I}{R} Y = \frac{I}{R}(y - y') = -(xy' - x'y)\sin A + (yz' - y'z)\sin C$ en $\frac{I}{R} Z = \frac{I}{R}(z - z') = -(yz' - y'z)\sin B + (zx' - z'x)\sin A$, en door deze waarden te substitueeren in $d^2 = \frac{Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos A}{\sin^2 A}$ — nog werd gebracht onder den symmetrischen vorm:

$$\frac{I^2}{R^2} d^2 = (yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2 - 2(zx' - z'x) . (xy' - x'y)\cos A - 2(xy' - x'y)(yz' - y'z)\cos B - 2(yz' - y'z) . (zx' - z'x)\cos C.$$

Ontwikkelt men dezen volgens x', y', z', en blijft men als boven de zijden van den voetpuntsdriehoek A B C, van het punt P of (x, y, z) noemen a_1, b_1, c_1, dan wordt de coëfficient van den term x'^2 gelijk $y^2 + z^2 + 2yz\cos A = a_1^2$, en evenzoo die van y'^2 en van z'^2 gelijk b_1^2 en c_1^2, terwijl voor den coëfficient van den term $2y'z'$ komt $-(yz - x^2\cos A + xy\cos B + zx\cos C)$. Om zich van de meetkundige beteekenis van dezen laatsten coëfficient rekenschap te geven, kan men nu gebruik maken van de beide uit genoemden voetpuntsdriehoek af te lezen betrekkingen

$b_1 c_1 \cos A_1 = \frac{1}{2}(-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = x^2 - yz \cos A + zx \cos B + xy \cos C$
en

$$b_1\, c_1 \sin A_1 = 2\, I_1 = y\, z \sin A + z\, x \sin B + x\, y \sin C;$$

gevende zoowel $b_1\, c_1 \cos(A + A_1) = -(y\, z - x^2 \cos A + x\, y \cos B + z\, x \cos C)$ als ook $b_1\, c_1 \sin(A + A_1) = x(x \sin A + y \sin B + z \sin C) = x \frac{I}{R}$. Het blijkt dus, indien men ook op de overeenkomstige waarden voor $B + B_1$ en $C + C_1$ let, dat te schrijven is $\frac{I^2}{R^2} d^2 = a_1^2\, x'^2 + b_1^2 y'^2 + c_1^2 z'^2 + 2 b_1 c_1 y' z' \cos(A + A_1) + 2\, c_1\, a_1\, z'\, x' \cos(B + B_1) + 2\, a_1\, b_1\, x'\, y' \cos(C + C_1)$, en dat hierin de hoeken $A + A_1$, $B + B_1$, $C + C_1$ nog samenhangen volgens $\frac{b_1\, c_1 \sin(A + A_1)}{x} = \frac{c_1\, a_1 \sin(B + B_1)}{y} = \frac{a_1\, b_1 \sin(C + C_1)}{z} = \frac{I}{R}$. Ten slotte kunnen natuurlijk ook de rollen, die de beide punten P en P′ in deze formulen vervullen, onderling verwisseld worden.

Na deze uitweidingen omtrent den afstand van twee willekeurige punten, komen wij in de eerste plaats tot de bepaling van het middelpunt van den cirkel $U + \lambda a_1^2 + \mu b_1^2 + \nu c_1^2 = 0$. Daartoe kan de voorwaarde dienen, dat de poollijn van dit middelpunt in het oneindige moet liggen; dat dus de coëfficienten der termen in x, y, z van de vergelijking dezer poollijn, namelijk de afgeleiden naar x, y, z van de vergelijking van den cirkel zelf, evenredig moeten zijn aan $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$. Dit geeft

$$\frac{(z \sin B + y \sin C) + 2\,\mu\,(x + z \cos B) + 2\,\nu\,(x + y \cos C)}{\sin A} =$$
$$= \frac{(x \sin C + z \sin A) + 2\,\nu\,(y + x \cos C) + 2\,\lambda\,(y + z \cos A)}{\sin B} =$$
$$= \frac{(y \sin A + x \sin B) + 2\,\lambda\,(z + y \cos A) + 2\,\mu\,(z + x \cos B)}{\sin C};$$

en om nu uit deze dubbele vergelijking de onderlinge verhoudingen van x, y, z op te lossen, kan bijvoorbeeld de opmerking dienen, dat de som der producten van $\cos B$, $\cos A$ en -1 met de drie noemers gelijk nul is, en dat dit dus ook voor de drie tellers moet gelden: hierdoor toch

verkrijgt men, alle termen in x bijeenbrengende, en evenzoo in y en in z, $(x \sin A + y \sin B)\ (2\nu \sin C - \cos C) - - z \{\sin A.(2\lambda \sin A - \cos A) + \sin B.(2\mu \sin B - \cos B)\} = 0$, dat is de onderlinge gelijkheid der beide eerste van de drie breuken $\frac{y(2\nu \sin C - \cos) - z(2\mu \sin B - \cos B)}{\sin A} =$

$$= \frac{z(2\lambda \sin A - \cos A) - x(2\nu \sin C - \cos C}{\sin B} =$$

$$= \frac{x(2\mu \sin B - \cos B) - y(2\lambda \sin A - \cos A)}{\sin C} = 0,$$ waarvan de derde, op grond van de symmetrie van ons vraagstuk, door eene rondgaande verschikking van letters mocht worden bijgeschreven; terwijl de nul aan het slot te voorschijn kwam als som der producten van de drie alsnu voorhanden tellers met x, y, z, gedeeld door de overeenkomstige som voor de drie noemers. En het blijkt alzoo, dat het bedoelde middelpunt bepaald wordt door de formulen $\frac{x}{2\lambda \sin A - \cos A} =$

$$= \frac{y}{2\mu \sin B - \cos B} = \frac{z}{2\nu \sin C - \cos C} = \frac{I}{2RN},$$ waarin namelijk, de notatie $N = \lambda \sin^2 A + \mu \sin^2 B + \nu \sin^2 C - - \sin A.\sin B.\sin C$ ter bekorting ingevoerd zijnde, het laatste lid gevonden werd door de som der producten van de tellers der drie eerste leden, evenals voor de noemers, met $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ te nemen.

Het middelpunt van den cirkel $U + \lambda a_1^2 + \mu b_1^2 + \nu c_1^2 = 0$ alzoo gevonden zijnde, gaan wij nu — zooals zal blijken met het doel om daaruit eene tweeledige uitkomst af te leiden — den afstand van dit middelpunt tot een geheel willekeurig punt (x, y, z) van het vlak berekenen, en wel door middel van de boven opgemaakte symmetrische formule $d^2 = -\frac{YZ \sin A + ZX \sin B + XY \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}$, waarin dus het coördinatenverschil $X = \frac{I}{2RN}(2\lambda \sin A - \cos A) - x$, en evenzoo voor Y en voor Z, te nemen is. Derhalve wordt

$$- d^2 \sin A.\sin B.\sin C = \frac{4R^2 N^2}{I^2} \{\sin A, (2\mu \sin B - \cos B).$$

$.(2\,\nu \sin C - \cos C) + \sin B.(2\,\nu \sin - \cos C)\,(2\,\lambda \sin A - \cos A) +$
$+ \sin C.(2\,\lambda \sin A - \cos A)\,(2\,\mu \sin B - \cos B)\} - \frac{I}{2RN}.$
$.\{(2\,\lambda \sin A - \cos A)(z \sin B + y \sin C) + (2\,\mu \sin B - \cos B).$
$.(x \sin C + z \sin A) + (2\,\nu \sin C - \cos C)(y \sin A + x \sin B)\} + U.$

Hierin is de coëfficient van den term in $\frac{I^2}{4\,R^2\,N^2}$ gelijk $4\,(\mu\,\nu + \nu\,\lambda + \lambda\,\mu) \sin A.\sin B.\sin C - 2\,\lambda \sin^2 A - 2\,\mu \sin^2 B -$ $- 2\,\nu \sin^2 C + (\sin A.\cos B.\cos C + \sin B.\cos C.\cos A +$ $+ \sin C.\cos A.\cos B) = \{4(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) - 1\} \sin A.\sin B.\sin C - 2N;$ voor den coëfficient van den term in $\frac{I}{2RN}$ komt — indien men, wat het van λ, μ, ν afhangende gedeelte betreft, er op bedacht is, dat reeds in den aanhef van dit opstel, onmiddellijk na de formulen (1), de identiteit $(U + \lambda\,a_1^2 +$ $+ \mu\,b_1^2 + \nu\,c_1^2) \sin A.\sin B.\sin C = - U N + G\,\{\lambda \sin A.(y \sin C +$ $+ z \sin B) + \mu \sin B.(z \sin A + x \sin C) + \nu \sin C.(x \sin B + y \sin A)\}$ bleek, en indien men tevens op $G = \frac{I}{R}$ let — de waarde $\frac{2\,R}{I}\,\{(U + \lambda\,a_1^2 + \mu\,b_1^2 + \nu\,c_1^2) \sin A.\sin B.\sin C + U\,N\} -$ $- (x \sin A + y \sin B + z \sin C)$; zoodat men door substitutie verkrijgt $- d^2 \sin A.\sin B.\sin C = \frac{I^2}{4\,R^2\,N^2}\,\{(4\,(\mu\,\nu + \nu\,\lambda +$ $+ \lambda\,\mu) - 1) \sin A.\sin B.\sin C - 2\,N\} - \frac{I}{2\,R\,N}\;\frac{2\,R}{I}\,((U +$ $+ \lambda\,a_1^2 + \mu\,b_1^2 + \nu\,c_1^2) \sin A.\sin B.\sin C + U\,N) - \frac{I}{R} + U,$ of na herleiding $d^2 = \frac{I^2}{4\,R^2\,N^2}\,(1 - 4\,(\mu\,\nu + \nu\,\lambda + \lambda\,\mu)) +$ $+ \frac{U + \lambda\,a_1^2 + \mu\,b_1^2 + \nu\,c_1^2}{N}$. En het zoo even aangekondigde dubbele besluit, uit deze formule te trekken, bestaat nu hierin: vooreerst, dat als het beschouwde punt (x, y, z) op den cirkel $U + \lambda\,a_1^2 + \mu\,b_1^2 + \nu\,c_1^2 = 0$ zelf ligt, en dus de tweede term der formule verdwijnt, de straal r van dezen cirkel blijkt bepaald te worden door $r^2 = \frac{I^2}{4\,R^2\,N^2}\,(1 - 4\,(\mu\,\nu +$

$+\nu\lambda+\lambda\mu))$; ten andere, dat de macht van een willekeurig punt (x, y, z) ten opzichte van denzelfden cirkel, tot waarde hebbende d^2-r^2, juist door dien tweeden term $\dfrac{U+\lambda a_1^2+\mu b_1^2+\nu c_1^2}{N}$ zelf wordt voorgesteld. Daar voor $\lambda=\mu=\nu=0$ deze breuk zich vereenvoudigt tot $-\dfrac{U}{sin A . sin B . sin C}$, voor $\lambda=\infty$ tot $\dfrac{a_1^2}{sin^2 A}$, en evenzoo voor $\mu=\infty$ en voor $\nu=\infty$, zijn in deze laatste meer algemeene uitkomst naar behooren de reeds vroeger gevondene voor de macht ten opzichte van den omgeschreven cirkel $U=0$ en van de drie puntcirkels A, B, C als bijzondere gevallen vervat.

Wanneer wij thans nog tot de bepaling van den onderlingen afstand der middelpunten van twee willekeurige cirkels (λ, μ, ν) en (λ', μ', ν') overgaan, hebbende r en r' tot stralen, schijnt daarbij, ook om ten slotte tot den snijdingshoek dezer twee cirkels te komen, eene eenigszins andere rekenwijze verkieslijk. Wel weder door dezelfde formule $-d^2 sin A . sin B . sin C = YZ sin A + ZX sin B + XY sin C$, maar door daarin thans het door $\dfrac{I}{2R} X = \dfrac{2\lambda sin A - cos A}{N} - \dfrac{2\lambda' sin A - cos A}{N'} = 2\left(\dfrac{\lambda}{N}-\dfrac{\lambda'}{N'}\right) sin A - \dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{N'} cos A$ bepaalde coördinatenverschil, en evenzoo voor $\dfrac{2R}{I} Y$ en voor $\dfrac{2R}{I} Z$, te substitueeren, waardoor komt $-\dfrac{4R^2}{I^2} d^2 sin A . sin B . sin C = 4\left(\dfrac{\mu}{N}-\dfrac{\mu'}{N'}\right)\left(\dfrac{\nu}{N}-\dfrac{\nu'}{N'}\right)+\left(\dfrac{\nu}{N}-\dfrac{\nu'}{N'}\right)\left(\dfrac{\lambda}{N}-\dfrac{\lambda'}{N'}\right)+$ $+\left(\dfrac{\lambda}{N}-\dfrac{\lambda'}{N'}\right)\left(\dfrac{\mu}{N}-\dfrac{\mu'}{N'}\right) sin A . sin B . sin C - 2\left(\dfrac{1}{N}-\dfrac{1}{N'}\right) . \dfrac{\lambda}{N}-\dfrac{\lambda'}{N'}\Big) sin^2 A + \left(\dfrac{\mu}{N}-\dfrac{\mu'}{N'}\right) sin^2 B + \left(\dfrac{\nu}{N}-\dfrac{\nu'}{N'}\right) sin^2 C +$ $+\left(\dfrac{1}{N}-\dfrac{1}{N'}\right)^2 (sin A . cos B . cos C + sin B . cos C . cos A +$ $+ sin C . cos A . cos B)$, of, omdat hierin de tweede en de

derde term te samen bedragen $-2\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N'}\right)\left(\frac{N+sin A . sin B . sin C}{N}-\right.$ $\left.-\frac{N'+sin A \,.\, sin B \,.\, sin C}{N'}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N'}\right)^2 sin A . sin B . sin C =$ $=-\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N'}\right)^2 sin A \,.\, sin B \,.\, sin C$, bij oplossing van d^2 zelf, $d^2=\frac{I^2}{4R^2}\frac{1-4(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)}{N^2}+\frac{1-4(\mu'\nu'+\nu'\lambda'+\lambda'\mu')}{N'^2}-$ $-2\frac{1-2(\mu\nu'+\mu'\nu+\nu\lambda'+\nu'\lambda+\lambda\mu'+\lambda'\mu)}{NN'}=r^2+r'^2-$ $-2rr'\frac{1-2(\mu\nu'+\mu'\nu+\nu\lambda'+\nu'\lambda+\lambda\mu'+\lambda'\mu)}{\sqrt{\{1-4(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\}\{1-4(\mu'\nu'+\nu'\lambda'+\lambda'\mu')\}}}$. En daar nu — ten minste indien men den hoek θ der beide cirkels in dien zin meet, dat hij gelijk is aan den hoek tusschen de stralen van het snijpunt, en niet aan diens supplement — ook $d^2=r^2+r'^2-2rr' \cos \theta$ is, zoo blijkt de gevonden coëfficient van $2rr'$ niet anders dan den cosinus van dezen hoek te beteekenen; eene uitkomst, waarin dan ook als bijzondere gevallen de door den heer SCHOUTE langs anderen weg gevonden voorwaarden 3) voor loodrechte snijding en 4) voor raking vervat zijn.

In Serie II, Tomo 36, van de Memorie della Reale Accademia della Scienze di Torino, 1884, is opgenomen eene merkwaardige verhandeling van den hoogleeraar LORIA, tot titel hebbende: »Ricerche intorno alla geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione della superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito" (101 bladz.), waaraan later nog door den schrijver als vervolg is toegevoegd, in Vol. 20 der Atti van dezelfde Akademie, 1885, »Nuovi studi sulla geometria della sfera" (24 bladz.). Het hoofddenkbeeld, dat in deze stukken uitvoerig wordt uitgewerkt, bestaat hierin, dat iedere willekeurige bol kan worden voorgesteld door eene vergelijking, komende door de vergelijkingen van vijf, eens en

vooraf aangenomen, vaste of grondbollen — bij voorbeeld in Cartesische coördinaten — met coëfficienten in behoorlijke onderlinge verhoudingen lineair en gelijkslachtig te verbinden. Het heeft weinig moeite in, langs den door den Heer LORIA gebaanden weg het dergelijke te doen voor in een zelfde vlak liggende cirkels; en ik zal er mij dan ook toe bepalen om, met verwijzing naar de genoemde stukken, hier in hoofdzaak slechts de voornaamste uitkomsten te vermelden, die men, uit den aard der zaak steeds ééne afmeting minder gebruikende, zoodoende verkrijgt.

Gegeven zijnde in één vlak vier vaste of grondstelsels $s_i = (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 - R_i^2 = 0$ ($i = 1$ tot 4), is iedere cirkel van het vlak te brengen onder den vorm $s = \sum_i s_i x_i = s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 = 0$, waarin $x_{1 \text{ tot } 4}$ zijne vier gelijkslachtige coördinaten zijn.

Indien bij vervorming door wederkeerige voerstralen de cirkels s_i, s overgaan in de cirkels S_i, S, dan heeft S ten opzichte der S_i dezelfde gelijkslachtige coördinaten die s had ten opzichte der s_i.

De cirkel $s = 0$, dat is, de notatie $p_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 - R_i^2$ invoerende, $\sum_i x_i (x^2 + y^2) - 2(\sum_i x_i \alpha_i . x + \sum \beta_i x_i y) + \sum_i p_i^2 x_i = 0$, heeft tot rechthoekige middelpuntscoördinaten

$$x = \frac{\sum_i \alpha_i x_i}{\sum_i x_i},\quad y = \frac{\sum_i \beta_i x_i}{\sum_i x_i},$$

en tot vierkant van zijn straal

$$R^2 = \frac{(\sum_i \alpha_i x_i)^2 + (\sum_i \beta_i x_i)^2 - \sum_i x_i \sum_i p_i^2 x_i}{(\sum_i x_i)^2} = \frac{R_{xx}}{(\sum_i x_i)^2};$$

waarin de door de benaming grondvorm aan te duiden teller R_{xx} tot waarde verkrijgt $R_{xx} = \sum_i R_i^2 x_i^2 + \sum_{ik} \{R_i^2 + R_k^2 - ((\alpha_i - \alpha_k)^2 + (\beta_i - \beta_k)^2)\} x_i x_k$, dat is—schrijvende $R_i^2 = R_{ii}$, en den zoogenaamden gemeenschappelijken invariant van den i^{den} en den k^{den} grondcirkel voorstellende door $2 R_{ik} = 2 R_{ki} = R_i^2 + R_k^2 - ((\alpha_i - \alpha_k)^2 + (\beta_i - \beta_k)^2)$ — de waarde $R_{xx} = \sum_{ik} R_{ik} x_i x_k$, waarin namelijk ik eene volledige groepering twee aan twee van de getallen 1 tot 4 verbeeldt.

Voor $R_{xx}=0$ herleidt de cirkel met coördinaten x_i zich dus tot een puntcirkel; voor $\sum_i x_i = 0$ tot eene rechte lijn. En omgekeerd.

Voor vier willekeurige punten van een vlak is, als $d_{ik}=d_{ki}$ het vierkant van den onderlingen afstand van het i^{de} en het k^{de} punt beteekent, (zie bij voorbeeld BALTZER, Determinanten, Seite 215—216; ook Seite 231)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zijn deze punten de middelpunten van vier cirkels met stralen R_i, waarvan de gemeenschappelijke invarianten twee aan twee worden voorgesteld door (ik), zoodat $d_{ik}=d_{ki}=$ $=R_i^2+R_k^2-(ik)$ is, dan vindt men hieruit na herleiding het volgende verband tusschen de vier stralen en de zes invarianten

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2R_1^2 & (12) & (13) & (14) \\ 1 & (12) & 2R_2^2 & (23) & (24) \\ 1 & (13) & (23) & 2R_3^2 & (34) \\ 1 & (19) & (24) & (34) & 2R_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Snijden deze vier cirkels elkander twee aan twee rechthoekig, zoodat alle $(ik)=0$ zijn, dan vereenvoudigt zich dit verband tot $\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}+\frac{1}{R_4^2}=0$; de cirkels kunnen alzoo dan niet alle vier bestaanbaar zijn (zie hierover ook Schoute, blz. 791—792).

Gegeven zijnde de rechthoekige coördinaten (x, y) van een punt, en de grondvorm R_{xx}, die dus voor dit punt gelijk nul moet zijn, te vinden zijne coördinaten x_i. Daartoe heeft men de onderlinge verhoudingen van de vier coördinaten x_i op te lossen uit de drie vergelijkingen $\sum_i (a_i - x)\, x_i = 0$,

$\sum_i (b_i - y)\, x_i = 0$ en $x^2 + y^2 - \dfrac{\sum_i p_i^2 x_i}{\sum_i x_i} = 0$ of $\sum_i (p_i^2 -$

$-(x^2+y^2))\, x_i = 0$. Er komt, als $i\,k\,l\,m$ eene rondgaande verschikking van de getallen 1, 2, 3, 4 en $\equiv$ een teeken van evenredigheid is,

$$x_i \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m & x \\ \beta_k & \beta_l & \beta_m & y \\ p_k^2 & p_l^2 & p_m^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} \equiv A_i\,(x^2+y^2) + B_i\,x + C_i\,y + D_i\,,$$

ten blijke dat (als men dezen laatsten vorm door S_i voorstelt) x_i evenredig zijn aan de inhouden $\frac{1}{2} A_i$ der telkens door de middelpunten van de drie overige grondcirkels s_k, s_l, s_m bepaalde driehoeken, vermenigvuldigd met de machten van het punt (x, y) ten opzichte van vier cirkels S_i, die ieder rechthoekig snijden telkens de drie evenbedoelde ongelijknamige grondcirkels s_k, s_l, s_m; want voor den gemeenschappelijken invariant van de beide cirkels S_i en s_k komt na herleiding $-\dfrac{A_i\,p_k^2 + B_i\,\alpha_k + C_i\,\beta_k + D_i}{A_i}$,
zoodat deze evenredig is aan den zoo even gevonden determinant, wanneer men daarin de laatste kolom $(1, x, y, x^2+y^2)$ vervangt door $(1, x_k, \beta_k, \beta_k, p_k^2)$, als wanneer die determinant juist voor $k = k$, l en m gelijk nul wordt.

Dezelfde vier cirkels S_i, die ieder rechthoekig snijden drie der vier grondcirkels s_i, doen ook de beteekenis kennen der vier gelijkslachtige coördinaten x_i voor een willekeurigen cirkel $s = \sum\limits_k s_k\, x_k = 0$. Want voor den door (s, S_i) voor te stellen gemeenschappelijken invariant van dezen cirkel en van S_i komt $(s, S_i) = -\dfrac{A_i \sum\limits_k p_k^2\, x_k + B_i \sum\limits_k \alpha_k\, x_k + C_i \sum\limits_k \beta_k\, x_k + D_i \sum\limits_k x_k}{A_i \sum\limits_k x_k}$,

dat is $(s, S_i)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m \\ \beta_k & \beta_l & \beta_m \end{vmatrix} \sum\limits_k x_k = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \sum x_k \\ \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m & \sum \alpha_k\, x_l \\ \beta_k & \beta_l & \beta_m & \sum \beta_k\, x_l \\ p_k^2 & p_l^2 & p_m^2 & \sum p_k^2\, x_k \end{vmatrix}$;

of, als men in dezen laatsten determinant de laatste kolom vermindert met x_k maal de eerste, x_l maal de tweede en x_m maal de derde, en als men door I_i den inhoud verstaat van den driehoek, bepaald door de middelpunten van den k^{den},

den l^{den} en den m^{den} grondcirkel, $(s, S_i)\ I_i \equiv \begin{vmatrix} p_k^2 & p_l^2 & p_m^2 & p_i^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m & \alpha_i \\ \beta_k & \beta_l & \beta_m & \beta_i \end{vmatrix}$;
waaruit blijkt, dat de coördinaten van een willekeurigen cirkel evenredig zijn aan zijne gemeenschappelijke invarianten met de vier cirkels S_i maal de inhouden der driehoeken, bepaald telkens door de middelpunten der drie overige grondcirkels s_i

Daar de hoek θ van twee cirkels $a(x^2 + y^2) + 2(bx + cy) + d = 0$ en $a'(x^2 + y^2) + 2(b'x + c'y) + d' = 0$ bepaald wordt door $cos\,\theta = \dfrac{2(bb' + cc') - (ad' + a'd)}{2\sqrt{(b^2 + c^2 - ad)(b'^2 + c'^2 - a'd')}}$, vindt men voor den hoek (y, z) van twee cirkels met coördinaten y_i en z_i,

$$cos(y,z) = \frac{2(\Sigma \alpha_i y_i \Sigma \alpha_i z_i + \Sigma \beta_i y_i \Sigma \beta_i z_i) - (\Sigma y_i \Sigma p_i^2 z_i + \Sigma z_i \Sigma p_i^2 y_i)}{2\sqrt{\{(\Sigma x_i y_i)^2 + (\Sigma \beta_i y_i)^2 - \Sigma y_i \Sigma p_i^2 y_i\}\{(\Sigma \alpha_i z_i)^2 + (\Sigma \beta_i z_i)^2 - \Sigma z_i \Sigma_i^2 z^i\}}},$$

of na herleiding

$$cos(y,z) = \frac{2\sum_i R_i^2 y_i z_i + \sum_{ik} \{R_i^2 + R_k^2 - ((\alpha_i - \alpha_k)^2 + (\beta_i - \beta_k)^2)\}(y_i z_k + y_k z_i)}{2\sqrt{[\sum_i R_i^2 y_i^2 + \sum_{ik}\{R_i^2 + R_k^2 - ((\alpha_i - \alpha_k)^2) + (\beta_i - \beta_k)^2)\} y_i y_k]\,[\sum_i R_i^2 z_i^2 + \sum_{ik}\{R_i^2 + R_k^2 - ((\alpha_i - \alpha_k)^2 + (\beta_i - \beta_k)^2)\} z_i z_k]}}.$$

Hierin is de noemer niet anders dan de dubbele wortel uit het product der beide grondvormen R_{yy} en R_{zz}, en de teller niet anders dan de dubbele poolvorm van R_{yy} ten opzichte van z, of van R_{zz} ten opzichte van y; zoodat men, dezen poolvorm voorstellende door $R_{yz} = R_{zy}$, nederkomt op

$$cos\,(y, z) = \frac{R_{yz}}{\sqrt{R_{yy}\,R_{zz}}}.$$

De voorwaarde voor loodrechte snijding is dus $R_{yz} = 0$; die voor raking is $R_{yy} R_{zz} - R^2_{yz} = 0$.

Zijn de vier grondcirkels onderling rechthoekig, dus alle $R_{ik} = R_{ki} = 0$, dan wordt eenvoudiger $cos\,(y, z) = \dfrac{\sum_i R_i^2 y_i z_i}{\sqrt{(\sum_i R_i^2 y_i^2)(\sum_i R_i^2 z_i^2)}}$. Neemt men bovendien voor één der beide willekeurige cirkels een der grondcirkels zelf — bij

voorbeeld voor den cirkel y den i^{den} grondcirkel — dan is tevens $y_k = y_l = y_m = 0$, en er komt $cos\,(i, z) = \frac{R_i\, z_i}{\sqrt{(\sum\limits_i R_i^2\, z_i)}}$; waaruit men besluit, dat de som der vierkanten van de cosinussen der hoeken, die een willekeurige cirkel maakt met vier twee aan twee rechthoekige cirkels, gelijk is aan de eenheid.

Deze uitkomst is ook als bijzonder geval vervat in de volgende formule ter bepaling van den hoek (y, z) van twee cirkels y en z, die ieder gegeven hoeken maken met vier willekeurige cirkels 1 tot 4, namelijk:

$$\begin{vmatrix} 1 & . cos\,(12) & . cos\,(13) & . cos\,(14) & . cos\,(1, y) \\ cos\,(21) & . \; 1 & . cos\,(23) & . cos\,(24) & . cos\,(2, y) \\ cos\,(31) & . cos\,(32) & . \; 1 & . cos\,(34) & . cos\,(3, y) \\ cos\,(41) & . cos\,(42) & . cos\,(43) & . \; 1 & . cos\,(4, y) \\ cos\,(z, 1) & . cos\,(z, 2) & . cos\,(z, 3) & . cos\,(z, 4) & . cos\,(z, y) \end{vmatrix} = 0.$$

Want onderstelt men hierin de cirkels 1 tot 4 twee aan twee rechthoekig, dan vereenvoudigt deze formule zich tot $cos\,(y, z) = \Sigma\, cos\,(i, y) \,.\, cos\,(i, z)$; en laat men nu bovendien de cirkels y en z samenvallen, dan komt men juist op het evengezegde weder.

De middelpunten van vier twee aan twee rechthoekige cirkels bepalen vier driehoeken, die ieder drie dier middelpunten tot hoekpunten en het vierde tot hoogtepunt hebben (zie dit ook bij Dr. Schoute, blz. 792).

Voor vier op een cirkel liggende punten geldt het verband (d als boven het vierkant van den onderlingen afstand voorstellende:) $\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$

(Zie dit ook bij Baltzer, Determinanten, Seite 227).

Nadat ik dit op in een zelfde vlak liggende cirkels betrekkelijke overzicht reeds had opgesteld, kwam ik door de vriendelijkheid van den Heer Loria in het bezit van een exemplaar van zijne in The quarterly journal of pure and applied mathematics, N°. 85, 1886, pages 44—74, geplaatste »Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan

et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4ᵉ ordre." Daaruit bleek mij, dat de schrijver zelf in dit stuk zijne vroegere beschouwingen over den bol reeds op overeenkomstige wijze op den cirkel had toegepast: en behoudens kleine verschillen in notatie is dan ook wat in het vorenstaande overzicht voorkomt bereids in het aangehaalde artikel te vinden.

Om nu meer in het bijzonder het door den Heer SCHOUTE ontwikkelde coördinatenstelsel voor cirkels in het platte vlak af te leiden uit het zoo even beschouwde meer algemeene, heeft men de vier tot nog toe niet nader bepaalde grondcirkels slechts te doen samenvallen met den omgeschreven cirkel $U = 0$ van den assendriehoek en met diens als puntcirkels beschouwde hoekpunten A, B, C. Men heeft dan voor de vierkanten der stralen en voor de invarianten der grondcirkels twee aan twee de waarden $R_{11} = R^2$, $R_{22} = R_{33} = R_{44} = 0$, $2R_{12} = 2R_{13} = 2R_{14} = R^2 + 0 - R^2 = 0$, $2R_{34} = -a^2$, $2R_{42} = -b^2$, $2R_{23} = -c^2$; dus voor den grondvorm $R_{xx} = \sum_{ik} R_{ik}\, x_i\, x_k = R^2 x^2 - a^2 x_3 x_4 - b^2 x_4 x_2 - c^2 x_2 x_3$.
En om nu hierin de bij een willekeurigen cirkel van het vlak, zooals die door de vergelijking $U + \lambda a_1^2 + \mu b_1^2 + \nu c_1^2 = 0$ werd voorgesteld, behoorende gelijkslachtige coördinaten $x_{1 \text{ tot } 4}$ te bepalen, bedenke men dat — blijkens de algemeene cirkelvergelijking $s = \sum_i s_i\, x_i = 0$, waarin $s_i = (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 - R_i^2$ was, en dus de macht van een willekeurig punt (x, y) ten opzichte van den grondcirkel $s_i = 0$ beteekende, en blijkens het in den aanhef van dit opstel gevondene omtrent de machten ten aanzien van de thans te bezigen grondcirkels U, a_1^2, b_1^2, c_1^2 — thans de waarden

$$s_1 = -\frac{U}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C},\ s_2 = \frac{a_1^2}{\sin^2 A},\ s_3 = \frac{b_1^2}{\sin^2 B},\ s_4 = \frac{c_1^2}{\sin^2 C}$$

gelden; hierdoor toch dat, om de vergelijking $s = s_1\, x_1 + s_2\, x_2 + s_3\, x_3 + s_4\, x_4 = 0$ werkelijk gelijk of althans evenredig aan $U + \lambda\, a_1^2 + \mu\, b_1^2 + \nu\, c_1^2 = 0$ te maken, vereischt

wordt $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -sin\,A \,.\, sin\,B \,.\, sin\,C : \lambda\, sin^2 A : \mu\, sin^2 B :$ $: \nu\, sin^2 C = -2\,I : \lambda\, a^2 : \mu\, b^2 : \nu\, c^2$. Deze coördinaten veroorloven nu als grondvorm bij voorbeeld te nemen $\frac{4\,R_{xx}}{a^2\,b^2\,c^2} =$

$$= \frac{16\,R^2\,I^2}{a^2\,b^2\,c^2} - 4\,\mu\,\nu - 4\,\nu\,\lambda - 4\,\lambda\,\mu = 1 - 4\,(\mu\,\nu + \nu\,\lambda + \lambda\,\mu);$$

en dat door dezen vorm, waardoor in hoofdzaak ons vraagstuk is opgelost, de vroegere formulen inderdaad teruggevonden worden, kan onder anderen blijken uit deze bepaling van den snijdingshoek θ van twee gegeven cirkels (λ, μ, ν) en (λ', μ', ν'): $cos\,\theta = cos\,(y, z) = \frac{R_{yz}}{\sqrt{R_{yy}\,R_{zz}}} =$

$$= \frac{1 - 2\,(\mu\,\nu' + \mu'\,\nu + \nu\,\lambda' + \nu'\,\lambda + \lambda\,\mu' + \lambda'\,\mu)}{\sqrt{\{1 - 4\,(\mu\,\nu + \nu\,\lambda + \lambda\,\mu)\}\,\{1 - 4\,(\mu'\,\nu' + \nu'\,\lambda' + \lambda'\,\mu')\}}}.$$

Overgaande tot de beschouwing der bollen in de ruimte, plaatsen wij daarbij eenige op den zoogenaamden sinus van een drievlakkigen hoek, en in verband daarmede op het aan te nemen coördinatentetraedrum, betrekkelijke formulen op den voorgrond.

Onder den sinus van een drievlakkigen hoek O A B C of van den daarmede overkomenden bolvormigen driehoek A B C verstaan wij (zie Baltzer, Seite 193) het product van den sinus van onverschillig welke der zijden met den sinus van den daarop uit het overstaande hoekpunt loodrecht vallenden boog, of, wat hetzelfde is, het product der sinussen van twee zijden en van den ingesloten hoek: in formule dus $sin\,A\,B\,C = sin\,b \,.\, sin\,c \,.\, sin\,A = sin\,c \,.\, sin\,a \,.\, sin\,B = sin\,a \,.\, sin\,b \,.\, sin\,C$. Hieruit volgt vooreerst (wegens $sin\,b \,.\, sin\,c \,.\, cos\,A = cos\,a -$ $- cos\,b \,.\, cos\,c$) dat sin^2 A B C $= (1 - cos^2 b)\,(1 - cos^2 c) -$ $- (cos\,a - cos\,b \,.\, cos\,c)^2 = 1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c +$ $+ 2\,cos\,a \,.\, cos\,b \,.\, cos\,c$ is, zooals men trouwens ook rechtstreeks afleest uit den vlakken en in een cirkel passenden vierhoek, die tot hoekpunten heeft het middelpunt O van den bol en de projectien bijvoorbeeld van A op de stralen O B en O C en op het zijvlak O B C; want noemende α den hoek van

O A met dit zijvlak, is de éêne diagonaal, namelijk $\cos\alpha$, van bedoelden vierhoek tevens middellijn van diens omgeschreven cirkel; en geeft dus de beschouwing van de andere diagonaal onmiddellijk $\cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos b \,.\, \cos c \,.\, \cos a = \cos^2\alpha \,.\, \sin^2 a$, dat is $\sin^2 \mathrm{A\,B\,C} = \sin^2 a \,.\, \sin^2\alpha = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c$, als zoo even. En ten andere komt voor den sinus van den pooldriehoek A′ B′ C′, door a, b, c te doen overgaan in $180° - A$, $110° - B$, $180° - C$, maar daarentegen α onveranderd te laten, $\sin^2 \mathrm{A'\,B'\,C'} = \sin^2 A \,.\, \sin^2\alpha = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C$, zoodat nog $\dfrac{\sin \mathrm{A\,B\,C}}{\sin \mathrm{A'\,B'\,C'}} = \dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ is.

Laat nu verder de inhoud van het te bezigen coördinatentetraedrum zelf door I, de inhouden van zijne zijvlakken, waarop de coördinaten w, x, y, z van een willekeurig punt P loodrecht staan, door i_w, i_x, i_y, i_z, de overeenkomstige hoogten van het tetraedrum door h_w, h_x, h_y, h_z, worden aangeduid; laten de ribben a, b, c de doorsneden van het zijvlak i_w opvolgend met i_x, i_y, i_z, zijn, en de overstaande ribben a', b', c' de doorsneden van i_y met i_z, van i_z met i_x, van i_x met i_y; en laten tevens dezelfde zes notatien a, b, c, a', b', c' de tweevlakkige hoeken of de standhoeken op deze ribben beteekenen; verder α_y en α_z de hoeken door de ribbe a in hare uiteinden met de aansluitende zijvlakken i_y en i_z gemaakt; evenzoo α'_w en α'_x voor de ribbe α', en op overeenkomstige wijze voor de notatien β en β', γ en γ'. Voor den sinus van den, bij voorbeeld door de coördinaten y, z en w gevormden, drievlakkigen hoek heeft men dan, daar de hoek tusschen y en z het supplement van den standhoek a', en de hoek van w met het vlak van y en z het supplement van den hoek α'_w is, $\sin y\,z\,w = \sin \alpha' \,.\, \sin \alpha'_w$; en op grond hiervan heeft men uit de formulen $3\,I = i_w\,h_w = \dfrac{2\,i_w\,i_z \sin a}{a}$ en $3\,I = i_w \,.\, a' \sin \alpha'_w = \dfrac{i_w\,a' \sin y\,z\,w}{\sin a'}$; wanneer men daarvan de eerste ook toepast op de overstaande ribbe a' en de tweede ook op het zijvlak i_x in plaats van i_w, en daarna evenzeer op de overstaande ribbe a, het stel

$$\frac{a}{sin\,a} = \frac{2\,i_w\,i_x}{3\,I} = \frac{3\,I}{i_y\,sin\,w\,x\,y} = \frac{3\,I}{i_z\,sin\,z\,w\,x},$$

en

$$\frac{a'}{sin\,a'} = \frac{2\,i_y\,i_z}{3\,I} = \frac{3\,I}{i_w\,sin\,y\,z\,w} = \frac{3\,I}{i_x\,sin\,x\,y\,z};$$

waarbij men zich nog twee overeenkomstige stellen, in b en b', en in c en c', afgeschreven kan denken. Dit zoo zijnde, heeft men hieruit vooreerst door producten van recht en ook van schuin onder elkander staande leden te nemen, de betrekkingen

$$\frac{a\,a'}{sin\,a\,.\,sin\,a'} = \frac{b\,b'}{sin\,b\,.\,sin\,b'} = \frac{c\,c'}{sin\,c\,.\,sin\,c'} = \frac{4\,i_w\,i_x\,i_y\,i_z}{9\,I^2} =$$

$$= \frac{2\,i_w}{sin\,x\,y\,z} = \frac{2\,i_x}{sin\,y\,z\,w} = \frac{2\,i_y}{sin\,z\,w\,x} = \frac{2\,i_z}{sin\,w\,x\,y},$$

(zie deze ook gedeeltelijk bij BALTZER, Seite 207 en 212); en ten andere — wat ons bij de zoo dadelijk te verrichten eliminatie te stade zal komen — de gelijke waarden

$$\frac{3\,I}{sin\,x\,y\,z} = i_x\,\frac{a'}{sin\,a'} = i_y\,\frac{b'}{sin\,b'} = i_z\,\frac{c'}{sin\,c'} = \frac{2\,i_x\,i_y\,i_z}{3\,I} =$$

$$= i_w\,\frac{sin\,a}{a}\,.\,\frac{b'\,c'}{sin\,b'\,.\,sin\,c'} = i_w\,\frac{sin\,b}{b}\,.\,\frac{c'\,a'}{sin\,a'\,.\,sin\,b'} = i_w\,\frac{sin\,c}{c}\,.\,\frac{a'\,b'}{sin\,a'\,.\,sin\,b'},$$

waarvan namelijk de drie laatste gevonden zijn door de producten van de derde en vierde, de vierde en tweede, de tweede en derde, telkens te deelen door de vijfde.

Om zich nu rekenschap te geven van de beteekenis der uitkomst van de eliminatie van eene der vier coördinaten, bij voorbeeld w, tusschen de vergelijking van den om het tetraedrum beschreven bol, namelijk $U = y\,z\,a\,sin\,a + z\,x\,b\,sin\,b + x\,y\,c\,sin\,c + w\,x\,a'\,sin\,a' + w\,y\,b'\,sin\,b' + w\,z\,c'\,sin\,c' = 0$, en de vergelijking $3\,I = w\,i_w + x\,i_x + y\,i_y + z\,i_z = 0$ van het vlak in het oneindige, heeft men, voorloopig de functien U en $3\,I$ zelve aanhoudende, $U\,i_w = y\,z\,a\,.\,i_w\,sin\,a + z\,x\,b\,.\,i_w\,sin\,b + x\,y\,c\,.\,i_w\,sin\,c + (x\,a'\,sin\,a' + y\,b'\,sin\,b' + z\,c'\,sin\,c')\,\{3\,I - (x\,i_x + y\,i_y + z\,i_z)\}$, en dus, door hierin de waarden van i_x, i_y, i_z, $i_w\,sin\,a$, $i_w\,sin\,b$, $i_w\,sin\,c$, allen volgens de even gevonden gelijkheden uitgedrukt in $\frac{3\,I}{sin\,x\,y\,z}$, over te brengen,

$$U\,i_w = \frac{3\,I}{\sin x\,y\,z}\left\{\frac{y\,z\,a^2 \sin b'\,.\,\sin c'}{b'\,c'} + \frac{z\,x\,b^2 \sin c'\,.\,\sin a'}{c'\,a'} + \right.$$
$$\frac{x\,y\,c^2 \sin a'\,.\,\sin b'}{a'\,b'} - (x\,a' \sin a' + y\,b' \sin b' + z\,c' \sin c')\left(\frac{x \sin a'}{a'} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{y \sin b'}{b'} + \frac{z \sin c'}{c'}\right)\right\} + 3\,I\,(x\,a' \sin a + y\,b' \sin b' + z\,c' \sin c').$$

Hierin wordt bij het uitwerken van den coëfficient van $\frac{3\,I}{\sin x\,y\,z}$ de term in x^2 gelijk $-x^2 \sin^2 a'$, de term in $y\,z$ gelijk $-\frac{y\,z \sin b'\,.\,\sin c'}{b'\,c'}(b'^2 + c'^2 - a^2) = -2\,y\,z \sin b'\,.\,\sin c'\,.$ $.\cos(b', c') = -2\,y\,z\,(\cos a' + \cos b'\,.\,\cos c')$, terwijl voor de termen in y^2, z^2, $z\,x$ en $x\,y$ dergelijke geldt. En derhalve is gevonden

$$\frac{3\,I}{\sin x\,y\,z}\{x^2 \sin^2 a' + y^2 \sin^2 b' + z^2 \sin^2 c' + 2\,y\,z\,(\cos a' +$$
$$+ \cos b'\,.\,\cos c') + 2\,z\,x\,(\cos b' + \cos c'\,.\,\cos a') + 2\,x\,y\,(\cos c' +$$
$$\cos a'\,.\,\cos b')\} = -U\,i_w + 3\,I\,(x\,a' \sin a' + y\,b' \sin b' + z\,c' \sin c').$$

Maar hierin valt nu op te merken, dat de coëfficient van $\frac{3\,I}{\sin x\,y\,z}$ evenredig is aan het vierkant van den afstand d_w van het beschouwde punt P of (w, x, y, z) tot het hoekpunt tegenover i_w. Voor een oogenblik toch de drie tetraedrale coördinaten x, y, z opvattende als drie nieuwe scheefhoekige coördinatenassen zelve, die in P als oorsprong twee aan twee de hoeken $180° - a'$, $180° - b'$, $180° - c'$ maken, is het genoemde hoekpunt niet anders dan het snijpunt van drie vlakken, die op de afstanden x, y, z van P loodrecht op deze coördinatenassen zijn aangebracht, en komt de afstand d_w dus tevens voor als middellijn van den omgeschreven bol van het tetraedrum, dat x, y, z tot drie aaneensluitende ribben heeft; terwijl diezelfde afstand met deze ribben of coördinatenassen hoeken maakt, die $\frac{x}{d_w}$, $\frac{y}{d_w}$, $\frac{z}{d_w}$ tot cosinussen hebben. Noemende dan nog X, Y, Z de nieuwe of scheefhoekige coördinaten van meergemeld hoekpunt, beschikt men door rechthoekige projectie op d_w, x, y en z over de vier vergelijkingen

$$\begin{array}{lllll} d_w^2 & -Xx & -Yy & -Zz & =0, \\ x & -X & +Y\cos c' & +Z\cos b' & =0, \\ y & +X\cos c' & -Y & +Z\cos a' & =0, \\ z & +X\cos b' & -Y\cos a' & -Z & =0; \end{array}$$

waaruit men oplost

$$\left|\begin{array}{llll} d_w^2 & x & y & z \\ x & 1 & -\cos c' & -\cos b' \\ y & -\cos c' & 1 & -\cos a' \\ z & -\cos b' & -\cos a' & 1 \end{array}\right| = 0,$$

(zie deze formule ook bij BALTZER, Seite 203), dat is bij ontwikkeling $d_w^2 \sin^2 x\,y\,z = x^2 \sin^2 a' + y^2 \sin^2 b' + z^2 \sin^2 c' + + 2\,y\,z(\cos a' + \cos b' \,.\, \cos c') + 2\,z\,x(\cos b' + \cos c' \,.\, \cos a') + + 2\,x\,y(\cos c' + \cos a' \,.\, \cos b')$. En hiermede is alzoo de eerste der vier formulen

$$3\,I\,d_w^2 \sin x\,y\,z = -\,U\,i_w + 3\,I(x\,a' \sin a' + y\,b' \sin b' + z\,c' \sin c'),$$
$$3\,I\,d_x^2 \sin y\,z\,w = -\,U\,i_x + 3\,I(y\,c \sin c + z\,b \sin b + w\,a' \sin a'),$$
$$3\,I\,d_y^2 \sin z\,w\,x = -\,U\,i_y + 3\,I(z\,a \sin a + w\,b' \sin b' + x\,c \sin c),$$
$$3\,I\,d_{z2} \sin w\,x\,y = -\,U\,i_z + 3\,I(w\,c' \sin c' + x\,b \sin b + y\,a \sin a),$$

verkregen; uit welke eerste de drie overigen door letterverwisseling konden worden afgeschreven. Het blijkt dus, dat de uitkomst der eliminatie, van bij voorbeeld w tusschen de vergelijkingen $U = 0$ van den omgeschreven bol en $3\,I = 0$ van het vlak in het oneindige, de vergelijking $d_w = 0$ van het als puntbol te beschouwen overeenkomstige hoekpunt van het tetraedrum is; en deze omstandigheid was trouwens te voorzien, doordien bij voorbeeld in de eerste der vier zoo even gevonden formulen de laatste term het product van het vlak in het oneindige met het raakvlak van den omgeschreven bol in het hoekpunt ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) voorstelt; zoodat het niet missen kan, of het eerste lid moet een dezen bol in dit hoekpunt rakenden bol voorstellen, en wel juist een bol met straal nul, omdat de coördinaat w uit dit eerste lid werd verdreven.

De som der producten van de vier gevonden formulen met w, x, y, z geeft nog $d_w^2 \,.\, w \sin x\,y\,z + d_x^2 \,.\, x \sin y\,z\,w + + d_y^2 \,.\, y \sin z\,w\,x + d_z^2 \,.\, z \sin w\,x\,y = U$, dat is $d_w^2 \,.\, w\,i_w + + d_x^2 \,.\, x\,i_x + d_y^2 \,.\, y\,i_y + d_z^2 \,.\, z\,i_z = \frac{2\,i_w\,i_x\,i_y\,z_z}{9\,I^2}\,U$. Hieruit volgt

vooreerst voor een willekeurig punt P van den omgeschreven bol, omdat daarvoor de functie U gelijk nul is, (noemende A, B, C, D de hoekpunten van het tetraedrum) het verband $PA^2.BCDP + PB^2.CDPA + PC^2.DPAB + PD^2.PABC = 0$ (zie dit ook bij BALTZER, Seite 226); ten andere — voor een willekeurig punt buiten dien bol de aan de functie U evenredige macht voorstellende door $C\,U$, en dit ter bepaling van deze C, bij voorbeeld toepassende op het middelpunt van den bol zelf, waarvoor de macht bedraagt $-R^2$, terwijl $d_w = d_x = d_y = d_z = R$ wordt, — de betrekking $-R^2 =$ $= C\,U = C \cdot \dfrac{9\,I^2}{2\,i_w\,i_x\,i_y\,i_z}\,R^2\,(w\,i_w + x\,i_x + y\,i_y + z\,i_z)$, gevende $C = -\dfrac{2\,i_w\,i_x\,i_y\,i_z}{27\,I^3}$, en dus voor de bedoelde macht in het algemeen $-\dfrac{d^2_w \cdot w\,i_w + d^2_x \cdot x\,i_x + d^2_y \cdot y\,i_y + d^2_z \cdot z\,i_z}{3\,I}$.

Voor een geheel willekeurigen bol kan de vergelijking onder den vorm $U + \varkappa\,d^2_w\,sin^2\,x\,y\,z + \lambda\,d^2_x\,sin^2\,y\,z\,w + \mu\,d^2_y\,sin^2\,z\,w\,x + \nu\,d^2_z\,sin^2\,w\,x\,y = 0$, lineair worden uitgedrukt in de vergelijkingen van den aan het tetraedrum omgeschreven bol en van de vier beschouwde puntbollen. Wij stellen ons thans in hoofdzaak nog voor, daarvoor middelpunt en straal in de vier coëfficienten $\varkappa$, λ, μ, ν en in de verdere gegevens te bepalen.

Wat vooreerst het middelpunt betreft, kan de opmerking op den voorgrond staan dat, als men bij voorbeeld bij onveranderde λ, μ, ν alleen $\varkappa$ laat veranderen, de komende bol door de doorsnede moet gaan van den door de oorspronkelijke $\varkappa$, λ, μ, ν aangewezen bol met het als puntbol beschouwde hoekpunt $d^2_w = 0$, zoodat dan het middelpunt op de lijn naar dat hoekpunt blijft. Hieruit blijkt, dat de onderlinge verhoudingen der coördinaten x, y, z van het middelpunt, onafhankelijk van $\varkappa$ moeten zijn, die dus alleen in hare verhoudingen tot w kan voorkomen. Dus $\varkappa$ is alleen in den noemer van w aan te treffen, en dan met hetzelfde recht

λ alleen in den noemer van van x, μ in dien van y, ν in dien van z. Bovendien moet voor $\varkappa = \lambda = \mu = \nu = 0$ het algemeene middelpunt (w, x, y, z) overgaan in het middelpunt (w', x', y', z') von den omgeschreven bol. En men kan dus stellen $\frac{w}{K - w'} = \frac{x}{L - x'} = \frac{y}{M - y'} = \frac{z}{N - z'}$, waarin namelijk K tegelijk met $\varkappa$, L met λ, M met μ, N met ν in nul moet overgaan. Om nu verder deze functiën K, L, M, N te bepalen, merke men op, dat voor het middelpunt, als pool van het vlak in het oneindige, de afgeleiden naar w, x, y, z van de vergelijking van den bol evenredig moeten zijn aan de overeenkomstige coëfficienten i_w, i_x, i_y, i_z in de vergelijking van dit vlak. Past men deze voorwaarde, in plaats van op den algemeenen bol, eenvoudigheidshalve liever toe op den bol, waarvoor $\lambda = \mu = \nu = 0$ is, waarvoor dus de vergelijking zich bepaalt tot $U + \varkappa\, d^3_w \sin^2 x\, y\, z = 0$, terwijl voor zijn middelpunt geldt $\frac{w}{K - w'} = \frac{x}{-x'} = \frac{y}{-y'} = \frac{z}{-z'}$, dan verkrijgt men (door te letten op de waarden voluit van U en van $d^2_w \sin^2 x\, y\, z$, en door in de afgeleiden daarvan, tegelijk w, x, y, z te vervangen door de evenredige $w' - K$) x', y', z', ter bepaling van K, de vergelijking

$$\frac{x'\, a' \sin a' + y'\, b' \sin b' + z'\, c' \sin c'}{i_w} =$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l} z'\, b \sin b + y'\, c \sin c + (w' - K)\, a' \sin a' + 2\, x\, \{x' \sin^2 a + \\ \quad + z' (\cos b' + \cos c' . \cos a') + y' (\cos c' + \cos a' . \cos b')\} \end{array}\right]}{i_x}$$

of ook, wat op hetzelfde moet nederkomen, gelijk aan overeenkomstige breuken met i_y en i_z tot noemers. En stelt men nu hierin bovendien $\varkappa = 0$, dus ook $K = 0$, dan blijft het eerste lid onveranderd; dit moet dus ook het geval zijn met het tweede lid, en dit vordert $- K a' \sin a' + 2\varkappa\, \{x' \sin^2 a' + + z' (\cos b' + \cos c' . \cos a') + y' (\cos c' + \cos a' . \cos b')\} = 0$. De op deze wijze bepaalde waarde van de onbekende K kan echter onder eenvoudiger vorm worden geschreven; daartoe kunnen met name de boven ter bepaling van den afstand d_w van een willekeurig punt tot een tetraedrum-hoekpunt gediend hebbende vier vergelijkingen strekken, wanneer men

deze thans toepast op het middelpunt van den omgeschreven bol. Voor dit middelpunt gaan de coördinaten x, y, z over in x', y', z', de afstand d_w in den straal R van dien bol, de aldaar ingevoerde nieuwe scheefhoekige coördinaten X in $\frac{a'}{2\,sin\,\alpha'_x} = \frac{a'\,sin\,a'}{2\,sin\,x\,y\,z}$, Y in $\frac{b'}{2\,sin\,\beta'_y} = \frac{b'\,sin\,b'}{2\,sin\,x\,y\,z}$, Z in $\frac{c'}{2\,sin\,\gamma'_z} = \frac{c'\,sin\,c'}{2\,sin\,x\,y\,z}$; hierdoor geeft de eerste der vier bedoelde vergelijkingen thans $2\,R^2\,sin\,x\,y\,z - x'\,a'\,sin\,a' - - y'\,b'\,sin\,b' - z'\,c'\,sin\,c' = 0$ (wat ons zoo straks van dienst zal wezen), terwijl men door uit de drie laatsten op te lossen bij voorbeeld X, verkrijgt $X\,sin^2\,x\,y\,z = \begin{vmatrix} x' & -cos\,c' & -cos\,b' \\ y' & 1 & -cos\,a' \\ z' & -cos\,a' & 1 \end{vmatrix}$,

dat is thans $\frac{a'\,sin\,a'\,.\,sin\,x\,y\,z}{2} = x'\,sin^2\,a' + y'\,(cos\,c' + cos\,a'\,.$ $.\,cos\,b') + z'\,(cos\,b' + cos\,c'\,cos\,a')$, of juist gelijk aan den vorm, waaraan zoo even K evenredig bleek. Mitsdien is gevonden $K = \varkappa\,sin\,x\,y\,z$, welke in x, y en z symmetrische functie vooreerst uitwijst, dat de boven ter loops aangestipte breuken met i_y en i_z tot noemers, waren zij gebruikt in plaats van de breuk met i_x tot noemer, werkelijk tot dezelfde waarde van K zouden geleid hebben; ten andere, door omzetting van letters, de waarden der overeenkomstige functiën L, M, N geeft, en zoodoende het vraagstuk van het middelpunt van den algemeenen bol oplost door het stel formulen $\frac{w}{\varkappa\,sin\,x\,y\,z - w'} =$

$$= \frac{x}{\lambda\,sin\,y\,z\,w - x'} = \frac{y}{\mu\,sin\,z\,w\,x - y'} = \frac{z}{\nu\,sin\,w\,x\,y - z'} = \frac{h}{N},$$

waarin namelijk het laatste lid verkregen werd door de tellers en de noemers der vier eerste leden na vermenigvuldiging met $sin\,x\,y\,z$, $sin\,y\,z\,w$, $sin\,z\,w\,x$, $sin\,w\,x\,y$ te sommeren, en daarbij de notatiën $h = w\,sin\,x\,y\,z + x\,sin\,y\,z\,w + y\,sin\,z\,w\,x + + z\,sin\,w\,x\,y = \frac{9\,I^2}{2\,i_w\,i_x\,i_y\,i_z}\,(w\,i_w + x\,i_x + y\,i_y + z\,i_z) = \frac{27\,I^3}{2\,i_w\,i_x\,i_y\,i_z}$, $\{$dus ook geldig voor (w', x', y', z') in plaats van $(w, x, y, z)\}$ en $N = \varkappa\,sin^2\,x\,y\,z + \lambda\,sin^2\,y\,z\,w + \mu\,sin^2\,z\,w\,x + \nu\,sin^2\,w\,x\,y - h$ (dus een andere N dan de zoo even gebezigde) in te voeren.

Overgaande tot de berekening van den straal r van den bol $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$, trekken wij, om het vierkant van dien straal te vinden, de macht van bij voorbeeld het hoekpunt tegenover i_w af van het vierkant van den afstand d_w van het gevonden middelpunt tot hetzelfde hoekpunt. Eerst dus de macht van dit hoekpunt, te beschouwen bij voorbeeld als product van zijne afstanden tot de beide snijpunten van den bol met de ribbe a'. Voor eenig punt van die ribbe op den afstand p van genoemd hoekpunt heeft men $w = (a' - p) \sin \alpha'_w$, $x = p \sin \alpha'_x$, $y = 0$, $z = 0$, $d_w = p$, $d_x = a' - p$, $d^2_y = p^2 + b'^2 - 2 b' p \cos (a', b')$, $d^2_z = p^2 + c'^2 - 2 c'^2 p \cos (a', c')$; voor hare beide snijpunten met den bol geldt dus — door deze waarden in de vergelijking van den bol te substitueren, waarbij de term U zich thans slechts tot $w\, x\, a' \sin a'$ bepaalt, terwijl voor ons doel de kennis van de termen in p^2 en zonder p kan volstaan — de vierkantsvergelijking $p\,(a - p) \sin \alpha_w \,.\, \sin \alpha'_x \,.\, a' \sin a' + \varkappa\, p^2 \sin^2 x\, y\, z + \lambda\, (a' - p)^2 . \, . \sin^2 y\, z\, w + \mu\, (p^2 + b'^2 - \ldots) \sin^2 z\, w\, x + \nu\, (p^2 + c'^2 - \ldots) . \, . \sin^2 w\, x\, g = 0$. Hierin wordt de coëfficient van p^2 (wegens $\sin \alpha'_w \,.\, \sin \alpha'_x\, a' \sin a' = (a' \sin \alpha'_w)(\sin a' \,.\, \sin \alpha'_x) = h_w \sin x\, y\, z = = \dfrac{27\, I^3}{2\, i_w\, i_x\, i_y\, i_z} = h$) gelijk $-h + \varkappa \sin^2 x\, y\, z + \lambda \sin^2 y\, z\, w + + \mu \sin^2 z\, w\, x + \nu \sin^2 w\, x\, y = N$, en de term zonder p, wegens $a' \sin y\, z\, w = \dfrac{h \sin a}{\sin x\, y\, z}$ en de twee overeenkomstigen, gelijk $\dfrac{h^2 (\lambda \sin^2 a' + \mu \sin^2 b' + \nu \sin^2 c')}{\sin^2 x\, y\, z}$; het product der beide wortels p, dat is de macht van het hoekpunt tegenover i_w, verkrijgt dus tot waarde het quotient $\dfrac{h^2 (\lambda \sin^2 a' + \mu \sin^2 b' + \nu \sin^2 c')}{N \sin^2 x\, y\, z}$.
En wat nu betreft het vierkant van den afstand d_w, daarvoor geeft de algemeene formule voor $3\, I\, d^2_w \sin x\, y\, z$ uitgedrukt in U en I, bij deeling door $3\, I \sin x\, y\, z = h\, i_w$, de waarde $d^2_w = -\dfrac{U}{h} + \dfrac{x\, a' \sin a' + y\, b' \sin b' + z\, c' \sin c'}{\sin x\, y\, z}$. Op grond van deze waarde en van de even gevonden macht kan men dus schrijven, de coördinaten x, y en z van het mid-

delpunt invullende, $r^2 = -\frac{U}{h} + \frac{h}{N \sin^2 x y z}$ [$\sin x y z$.
. $\{(\lambda \sin y z w - x') a' \sin a' + (\mu \sin z w x - y') b' \sin b' . +$
$+ (\nu \sin w x y - z') c' \sin c' \} - h (\lambda \sin^2 a' + \mu \sin^2 b' + \nu \sin^2 c')] =$
$= -\frac{U}{h} - \frac{h}{N \sin x y z} (x' a' \sin a' + y' b' \sin b' + z' c' \sin c')$ of, wegens de boven voor dezen laatsten vorm gevonden waarde, $r^2 = -\frac{U}{h} - \frac{h}{N} . 2 R^2$. Maar hierin blijft nu nog de berekening van U voor ditzelfde middelpunt over. Daartoe merke men op, dat $\frac{N^2}{h^2} U$ uit een zamenstel van zes termen van den vorm $\frac{N^2}{h^2} y z a \sin a$, dat is van den vorm $(\mu \sin z w x - y')$ . . $(\nu \sin w x y - z') a \sin a$, bestaat, en dat bij het uitwerken van deze vormen vooreerst een zestal termen van den vorm $\mu \nu \sin z w x . \sin w x y . a \sin a = h . \mu \nu \sin^2 a$, verder een viertal termen van den vorm $- \varkappa \sin x y z (x' a' \sin a' + y' b' \sin b' +$ $+ z' c' \sin c') = - 2 R^2 . \varkappa \sin^2 x y z$, eindelijk een zestal termen van den vorm $y' z' a \sin a$ komt. Neemt men nu in aanmerking, vooreerst, dat de vier termen, zooals $\varkappa \sin^2 x y z$, te samen $N + h$ vormen; ten andere, dat de zes termen, zooals $y' z' a \sin a$, te samen door den vroeger berekenden coëfficient $C = -\frac{2 i_w i_x i_y i_z}{27 I^3} = -\frac{1}{R}$ gedeelde en $-R^2$ bedragende macht van het middelpunt van den omgeschreven bol ten opzichte van dezen bol zelf voorstellen; dan is alzoo gevonden $\frac{N^2}{h^2} U = h (\mu \nu \sin^2 a + \nu \lambda \sin^2 b + \lambda \mu \sin^2 c + \varkappa \lambda \sin^2 a' +$ $+ \varkappa \mu \sin^2 b' + \varkappa \nu \sin^2 c') - 2 R^2 (N + h) + R^2 h$, waaruit bij substitutie in r^2 ten slotte de formule

$$r^2 = h^2 \frac{R^2 - (\mu\nu\sin^2 a + \nu\lambda\sin^2 b + \lambda\mu\sin^2 c + \varkappa\lambda\sin^2 a' + \varkappa\mu\sin^2 b' + \varkappa\nu\sin^2 c')}{(\varkappa\sin^2 xyz + \lambda\sin^2 yzw + \mu\sin^2 zwx + \nu\sin^2 wxy - h)^2}$$

voor het vierkant van den straal r van den willekeurigen bol $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ te voorschijn komt.

Wat den hoek θ betreft, volgens welken twee bollen $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ en $(\varkappa', \lambda', \mu', \nu')$ elkander snijden, bepaal ik mij tot de mededeeling, dat ik daarvoor gevonden heb

$$\cos\theta = \frac{\left[\begin{array}{c} R^2 - \tfrac{1}{2}\{(\mu\nu' + \mu'\nu)\sin^2 a + (\nu\lambda' + \nu'\lambda)\sin^2 b + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)\sin^2 c + \\ + (\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)\sin^2 a' + (\varkappa\mu' + \varkappa'\mu)\sin^2 b' + \varkappa\nu' + \varkappa'\nu)\sin^2 c^2\} \end{array}\right]}{\sqrt{\left[\begin{array}{c} \{R^2 - (\mu\nu\sin^2 a + \nu\lambda\sin^2 b + \lambda\mu\sin^2 c + \varkappa\lambda\sin^2 a' + \varkappa\mu\sin^2 b' + \\ + \varkappa\nu\sin^2 c')\}\{R^2 - (\mu'\nu'\sin^2 a + \nu'\lambda'\sin^2 b + \lambda'\mu'\sin^2 c + \varkappa'\lambda'\sin^2 a' + \\ + \varkappa'\mu'\sin^2 b' + \varkappa'\nu'\sin^2 c')\} \end{array}\right]}},$$

geheel in overeenstemming trouwens met de algemeene formule in de boven besproken verhandeling van den Heer LORIA over den bol.

ALGEBRAÏSCHE HOOFDSTUKKEN TER UITBREIDING VAN DE LEERBOEKEN OVER DE ELEMENTAIRE ANALYSE [1]),

BESCHOUWD DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

Niet gemakkelijk in de gelegenheid zijnde vele boeken te raadplegen, ga ik hoofdzakelijk op mijn geheugen af, wanneer ik verklaar, dat — voor zoover ik met de Nederlandsche leerboeken over Hoogere Algebra en Analyse bekend ben — de schrijver van de »Algebraïsche hoofdstukken" in zijn voorwoord niet ten onrechte zegt, dat veel van het daarin behandelde in die leerboeken niet voorkomt. Die hoofdstukken vormen dan ook naar mijn inzien in onze wiskundige litteratuur eene belangrijke en welkome aanvulling.

Door het volgende overzicht van den inhoud der negen hoofdstukken, waaruit het werk bestaat, hoop ik van deze gunstige opvatting rekenschap te geven; zij het ook, dat ik, waar de schrijver voor den geleidelijken gang van zijne uiteenzetting punten bespreekt, die men gewoonlijk elders behandeld vindt, om de reeds in den aanhef dezes vermelde reden, niet in eene vergelijking van zijne wijze van behandeling met die van anderen wensch te treden.

Het 1e hoofdstuk (blz. 1—48) handelt in Nos. 1—21 over

---

1) CORNEILLE L. LANDRÉ. Utrecht, Gebr. van der Post. 1891. groot 8°. XII en 235 blz. Prijs ƒ 2 90

»Rekenkundige reeksen van hoogere orde". Eerst worden de algemeene term en de som der termen uitgedrukt in de eerste termen van de reeks zelve en van hare opvolgende verschillen; ook de algemeene term in gegeven termen. Daarna wordt in een drietal N^{os} gehandeld over interpolatie, waarvoor later in N°. 17 nog de sommatie besproken wordt. »De som afgeleid uit den algemeenen term" is de titel van N°. 7, dat tevens de toepassing bevat op de sommatie der machten van de natuurlijke getallen, welke sommatie daarna bovendien door middel van het binomium van NEWTON verricht wordt. Dat in het algemeen, als $2n+1$ getallen eene reeks vormen van de $(2n-1)^e$ orde, en men met elkander twee getallen verwisselt die even ver van het middelste verwijderd zijn, of ook meer zulke verwisselingen maakt, de getallen alsdan in de nieuwe volgorde eene reeks der $(2n-1)^e$ orde blijven vormen, wordt daarna aangetoond; en eenigszins in verband hiermede wordt voor reeksen der tweede en der derde orde door eene gemeenschappelijke formule een term in eenige voorgaande en evenveel volgende uitgedrukt. Voor het geval eener reeks van de tweede orde wordt vervolgens eene nieuwe reeks gevormd, bestaande uit telkens de som van p opvolgende termen; uit deze eene derde reeks door sommatie telkens van q opvolgende termen, enz.; de algemeene op deze wijze ontstaande som wordt berekend, en daaromtrent nog een en ander opgemerkt. De zoogenaamde »afrondingsformulen", die moeten dienen om bij waarnemingen verkregen getallenrijen, die een al te onregelmatig beloop hebben, door andere meer regelmatige te vervangen, zijn nu aan de beurt; opvolgend worden zulke formulen van FINLAISON, WOOLHOUSE, ACKLAND, HIGHAM en nog een paar andere dergelijke verklaard en nader onderzocht, en wordt aangewezen, hoe men bij die allen ook door middel van de tweede verschillen kan afronden. De vier laatste N^{os} van het 1^e hoofdstuk zijn gewijd aan toepassingen: twee op meetkundig gebied, benadering van vlakke en van lichamelijke inhouden; twee op financieel of assurantie-gebied, benadering van lijfrente in termijnen en van den rentevoet bij gegeven annuïteit, waarbij onder anderen eene formule van HARDY.

In het 2^e hoofdstuk getiteld »Onderscheidene reeksen" (blz. 49—69, N^{os} 22—30) wordt vooreerst de sommatie van breuken met twee of meer factoren in den noemer besproken, en ten deze bewezen en — zooals trouwens ruimschoots in het geheele werk geschiedt — door stelkundige of door getallen-voorbeelden toegelicht dat, als de algemeene term eene rationeele breuk is, waarvan de noemer bestaat uit r factoren $n+a$, $n+b$, $n+c$, enz., (zijnde $b-a$, $c-b$, enz., geheele getallen) en de teller een rationeele vorm van hoogstens den $(r-2)^{en}$ graad is, de sommatie terug te brengen is tot de voor de hand liggende sommatie van $\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$, dat is van $\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}$. Hierna wordt de som van een eindig aantal termen eener wederkeerige reeks bepaald; vervolgens wordt de grens van $\frac{1^q+2^q+3^q+\ldots\ldots+(n-1)^q}{n^{q+1}}$ voor $n=\infty$ berekend; wordt de som der disconteering-reeks $\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n+i}+\frac{2}{n+2i}+\ldots+\frac{n-1}{n+(n-1)i}\right\}$ benaderd; en wordt bewezen dat, als u_u de algemeene term eener wederkeerige reeks van de orde r is, $U_u = u_{u+h}\, u_{u+i} - u_{u+h'}\, u_{u+i'}$ voor $h+i=h'+i'$ ook die van zulk eene reeks van de orde $\frac{1}{2}r(r-1)$ zal zijn. Het hoofdstuk wordt besloten door onderzoekingen over reeksen, waarbij de verschillen (meer in het bijzonder de eerste en de tweede), of waarbij de logarithmen eene gewone meetkundige reeks vormen; alsook over zoogenaamde meetkundige reeksen van hoogere orde, die eensdeels blijken bijzondere gevallen van de voorafgaande te zijn, ten andere logarithmisch met de rekenkundige reeksen van dezelfde orde in verband te staan.

Uitvoerig en stelselmatig wordt in het 3^e hoofdstuk, dat blz. 70—109 beslaat en N^{os} 31—52 bevat, over de zoo belangrijke »Convergentie en divergentie van oneindige reeksen" een onderzoek ingesteld. Zooals niet onnatuurlijk is, staat $Lim\, u_n = 0$ (voor $n=\infty$) als eerste vereischte voor convergentie op den voorgrond; maar dat dit vereischte niet voldoende is, blijkt al dadelijk uit N^0. 32, dat tot opschrift

draagt: »Elke harmonische reeks is divergent". De eerstvolgende N^{os} hebben tot onderwerp de reeksen met beurtelings positieve en negatieve termen, voor welke reeksen daarentegen het genoemde vereischte wel volstaat; verder het tweede, maar bij voorbeeld blijkens de voor $p \leq 1$ divergeerende reeks $A + \frac{1}{2\,(log\,2)^p} + \frac{1}{3\,(log\,3)^p} +$ enz. weder niet toereikende, vereischte $Lim\, n\, u_n = 0$; de onderlinge vergelijking van verschillende reeksen naar de grootte der termen, en de hierop berustende stellingen, dat twee reeksen u en v, waarvoor de limiet der verhouding $\frac{v_n}{u_n}$ eindig positief is, en evenzoo de twee reeksen $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots.$ en $u_1 + p\,u_p + p^2\,u_{p^2} + p^3\,u_{p^3} + \ldots.$, steeds gelijktijdig convergeeren of divergeeren. De vier N^{os} 38—41 worden nu gewijd, vooreerst aan de vergelijking van twee reeksen, niet naar de termen zelve, maar naar de verhouding van twee opvolgende termen, en te dezen aanzien blijkt dat, naarmate $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots.$ $\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}$ en, te beginnen bij eene bepaalde waarde van p, steeds $\frac{u_{p+1}}{u_p} \lessgtr \frac{v_{p+1}}{v_p}$ is, ook $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$ $\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}$ is; vervolgens aan de hieruit door vergelijking met eene meetkundige reeks ontstaande zoogenaamde kenmerken van den eersten rang voor eene gegeven reeks op zich zelve, namelijk de reeks is $\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}$, naarmate $Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \lessgtr 1$ of naarmate $Lim \sqrt[n]{u_n} \lessgtr 1$ of naarmate $Lim \frac{log \frac{1}{u_n}}{n} \gtrless 0$ is; eindelijk aan het betoog van de identiteit dezer drie kenmerken. Maar indien zich het overgangsgeval $Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim \sqrt[n]{u_n} = 1$ voordoet, blijft in het algemeen de convergentie of divergentie langs dezen weg onbeslist; men dient dan tot vergelijking met eene minder sterk

convergeerende of minder sterk divergeerende reeks dan de meetkundige over te gaan; en als zoodanig kan bij voorbeeld de reeks $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} +$ enz., in de plaats gesteld van de meetkundige $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} +$ enz., dienst doen. Op deze wijze komt de schrijver tot wat hij noemt de kenmerken van den tweeden rang, van welke er hier vier afhangende van de verhouding $\frac{u_{n+1}}{u^n}$, namelijk $Lim\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \gtrless 1$, $Lim\, n\left(\frac{u^n}{u_{n+1}}-1\right) \gtrless 1$,

$$Lim \frac{log \frac{u_n}{u_{n+1}}}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \gtrless 1 \text{ en } Lim\, n\, L \frac{u_n}{u_{n+1}} \gtrless 1$$ (zijnde L in deze laatste de Neperiaansche logarithmus); alsook twee in wezenlijkheid zamenvallende, afhangende van den term u_n zelf, namelijk $Lim \frac{log \frac{1}{u_n}}{log\, n} \gtrless 1$ en $Lim \frac{log \frac{1}{n\, u_n}}{log\, n} \gtrless 0$, vermeld en voor $\begin{matrix}\text{convergentie}\\ \text{divergentie}\end{matrix}$ geldig bevonden worden, terwijl daarvan ook hier weder de onderlinge identiteit wordt aangetoond. Toepassingen van een en ander vindt men in N°. 50, alwaar, voor het geval dat $\frac{u_{n+1}}{u_n} = A - \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} +$ enz. te schrijven is, volgens den eersten rang $\begin{matrix}\text{convergentie}\\ \text{divergentie}\end{matrix}$ blijkt, naarmate $A \lessgtr 1$ is; verder, als $A = 1$ is, volgens den tweeden rang $\begin{matrix}\text{convergentie}\\ \text{divergentie}\end{matrix}$ naarmate $B \gtrless 1$ is; terwijl, als ook $B = 1$ is, de tweede rang weder niet beslist, maar dan toch door vergelijking met eene harmonische reeks steeds divergentie bevonden wordt. In het algemeen, als de tweede rang te kort schiet, staat weder het onderzoek volgens een derden, zoo noodig volgens een vierden, rang en zoo voort open: dit geschiedt in de beide laatste N°s. van dit hoofdstuk die, door

vergelijking met de reeds boven aangehaalde reeks $\frac{1}{2(L2)^p}+$ $+\frac{1}{3(L3)^p}+$ enz. en met de overeenkomstige $\frac{1}{2L2.(LL2)^p}+$ $+\frac{1}{3L3.(LL3)^p}+$ enz. — welke beide blijken alleen voor $p>1$ te convergeeren — leeren dat, als $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{(n+1)}{n}=1$ is, en dus de tweede rang faalt, $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{(n+1)}{n}\frac{L(n+1)}{L\ n}\lesseqgtr 1$ een kenmerk van $\frac{\text{convergentie}}{\text{divergentie}}$ is; dat, als deze laatste limiet $=1$ is, en men in het geval van $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{A}{n\,L\,n}+$ enz. verkeert, alleen voor $A>1$ convergentie bestaat, terwijl dan in het tegengestelde geval $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{(n+1)}{n}\frac{L(n+1)}{Ln}\frac{LL(n+1)}{LLn}\lesseqgtr 1$ over $\frac{\text{convergentie}}{\text{divergentie}}$ moet beslissen; zoodat dan bij voorbeeld voor $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\,L\,n}-\frac{A}{n\,Ln.LLn}+$ enz. weder alleen bij $A>1$ convergentie geldt; enz.

De »Symmetrische functiën" vormen het onderwerp van het 4e hoofdstuk (blz. 110—129, Nos. 53—60). Hier worden eerst de sommen der gelijknamige machten — ook voor de hoogere en voor de negatieve machten — van de wortels eener hoogere machts-vergelijking uitgedrukt in hare coëfficienten, en omgekeerd; terwijl dit nog nader, onafhankelijk van de algemeene formulen, voor getallenvergelijkingen wordt aangewezen. Daaruit wordt, volgens wijlen den hoogleeraar Buys Ballot, onder anderen afgeleid dat, als in de vergelijking $x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots+p_m=0$ de som van de vierkanten der wortels, namelijk $p_1^2-2p_2<\frac{p_1^2}{m}$ is, of ook als de som der vierde machten, namelijk $(p_1^2-2p_2)^2+$ $+4p_1p_3-2p_2^2-4p_4\overline{\gtrless}0$ is, minstens één paar onbestaanbare wortels voorkomt; ook, dat ditzelfde het geval is, zoodra de som van de gelijknamige even machten der wortels

gelijk aan of kleiner dan de overeenkomstige som voor de afgeleide vergelijking is. Hierop wordt aangetoond, hoe in het algemeen rationale symmetrische functiën der wortels zijn uit te drukken door de sommen hunner machten; hoe de vergelijking te vormen is, die eene rationale functie van een gegeven aantal wortels eener gegeven vergelijking tot wortels heeft; hoe de vergelijking op de vierkanten van de verschillen der wortels te verkrijgen is door de sommen der machten van hare wortels te berekenen uit die sommen voor de gegeven vergelijking. Ten slotte wordt de leerwijze van CAUCHY verklaard ter bepaling van de symmetrische functiën der wortels door opeenvolgende verdrijving van deze wortels; ook hier wordt de theorie weder nader toegelicht door als voorbeeld te nemen de som der derde machten van de wortels der algemeene derde-machts-vergelijking; waarna nog wordt aangewezen, hoe het product der vierkanten van de verschillen der wortels van eenige vergelijking is af te leiden uit het overeenkomstige product voor de vergelijking van één graad lager.

»Eliminatie" is het opschrift van het 5e hoofdstuk (blz. 130—155, Nos. 61—71). Eerst wordt uiteengezet, dat de eliminatie, bij voorbeeld van x tusschen twee vergelijkingen met twee onbekenden x en y, eene vergelijking geeft, dienstig om y en daardoor verder ook x te berekenen; en dat, als y in de twee gegeven vergelijkingen niet voorkomt, de op dezelfde wijze gevonden en alsdan *resulteerende* genoemde vergelijking de betrekking tusschen de coëfficienten geeft, waarbij beide een gemeenschappelijken wortel hebben. Hierop wordt de resultante als evenredig aan het product der verschillen van elken wortel der eene vergelijking met elken wortel der andere beredeneerd, welk product uitgewerkt tot algemeenen term eene symmetrische functie van de wortels van eene der beide vergelijkingen heeft; door middel van dergelijke functiën wordt weder tot toelichting de resultante van twee vierkantsvergelijkingen, en ook die van eene derde-machts-vergelijking in verband met hare afgeleide bepaald. Dat de graad der eindvergelijking van twee vergelijkingen met twee onbekenden hoogstens gelijk aan het product van beider graden is, en dat, als deze eindvergelijking een veelvoudigen wortel

heeft, daarbij in het algemeen eene gelijkvoudige waarde van de andere onbekende behoort, wordt daarna aangetoond. En hieraan knoopt zich een drietal N^{os}. vast over oneindige wortels; over het bestaanbare en het onbestaanbare gedeelte van een complexen wortel, beschouwd als afzonderlijke onbekenden; en over het — behoudens soms het teeken — onveranderd blijven der resultante, zoowel bij vermindering der wortels met eene zelfde grootheid als bij omkeering der wortels. Het bepalen der resultante door middel van den grootsten gemeenen deeler of, wat hetzelfde is, door vermindering van den graad, wordt vervolgens besproken; maar tevens het hierbij soms voorkomende bezwaar van het invoeren van vreemde factoren aanschouwelijk gemaakt door het voorbeeld van twee derde-machts-vergelijkingen. Vrij van dit bezwaar zijn handelwijzen, waarbij men uit de twee gegeven vergelijkingen een lineair stelsel opmaakt, waartusschen de onbekenden te elimineeren zijn: twee dier handelwijzen, te danken aan EULER en aan CAUCHY, worden zoowel voor gegeven vergelijkingen van denzelfden als van verschillenden graad verklaard, en brengen de resultante in determinantenvorm te voorschijn. Berekening, hetzij van den enkelen, hetzij van de meerdere gemeenschappelijke wortels van twee vergelijkingen besluit het hoofdstuk.

Om niet te uitvoerig te worden, zal ik ten aanzien van het 6^e hoofdstuk »Een klasse van hoogere machtsvergelijkingen, die stelkundig kunnen worden opgelost" (blz. 156—175, N^{os}. 72—77), en van het 8^e hoofdstuk »Onmogelijkheid, de algemeene vergelijkingen van hooger dan den vierden graad algebraïsch op te lossen" (blz. 202—221, N^{os}. 87—94) niet in eene dergelijke ontleding treden als voor de voorafgegane, zij het ook, dat de twee genoemde hoofdstukken, in hoofdzaak de ontdekkingen behandelend waarmede groote Noorweegsche wiskundige N. H. ABEL (1802—1829) de theorie der vergelijkingen heeft verrijkt, mij de voornaamste van het geheele boek voorkomen. Maar juist daardoor leenen zij zich minder tot een eenigszins beknopt overzicht, en ik verwijs dus den belangstellenden lezer hier liever naar het werk van den Heer LANDRÉ zelf. Alleen zij vermeld, dat het 6^e hoofd-

stuk voornamelijk ten doel heeft de volgende stellingen te bewijzen: 1°. Als de wortels eener algebraïsche vergelijking kunnen worden voorgesteld door x, θx, $\theta^2 x, \ldots \theta^{m-1} x$, waarbij $\theta^m x = x$ is, en θx eene rationale functie is van x en van bekende grootheden (terwijl de notatie $\theta^2 x$ beteekent $\theta\theta x$, enz.), dan is deze vergelijking steeds algebraïsch op te lossen; 2°. Als twee wortels van eene niet-ontbindbare vergelijking van ondeelbaren graad steeds zoodanig van elkaar afhangen, dat de eene rationaal door den anderen kan worden uitgedrukt, dan is de vergelijking algebraïsch op te lossen; 3°. Is $q(x) = 0$ eene willekeurige algebraïsche vergelijking, waarvan alle wortels door een hunner, welken wij met x_1 zullen aanduiden, rationaal kunnen worden uitgedrukt; zijn verder θx_1 en $\theta_1 x_1$ twee andere willekeurige wortels, zoodat θx_1 en $\theta_1 x_1$ rationale functiën van x_1 beteekenen, zoo is de vergelijking oplosbaar, als $\theta\theta_1 x_1 = \theta_1 \theta x_1$ is. En wat het 8e hoofdstuk betreft — na een opzettelijk onderzoek omtrent geheele en gebroken rationale functiën, omtrent irrationale functiën van verschillende orde, en omtrent den algemeenen vorm der algebraïsche functiën — komt de schrijver tot de stelling: Als eene vergelijking algebraïsch oplosbaar is, kan men aan de algemeene uitdrukking voor den wortel zulk een vorm geven, dat al de functiën, welke in die uitdrukking voorkomen, rationale functiën zijn van de wortels der gegeven vergelijking; welke stelling, in verband met nog een en ander over circulaire permutaties, den weg baant tot het bewijs der als titel van dit hoofdstuk genoemde onmogelijkheid.

Het 7e hoofdstuk, getiteld »Verdeeling van den cirkel", (blz. 176—201, Nos 78—86) vormt den overgang tusschen de beide even besprokene, en bevat meer in het bijzonder eene toepassing van de aldaar aangehaalde 3e stelling. Het strekt onder anderen ten bewijze, dat elke gewone en stervormige regelmatige veelhoek algebraïsch te berekenen is, en houdt zich, ook met uitvoerige toelichting in het geval van den vijftienhoek en van den zeventienhoek, bezig met het onderzoek, wanneer zulke veelhoeken bovendien meetkundig te construeeren zijn.

Een 9e hoofdstuk besluit als »Nalezing" het werk (blz. 222—235, Nos. 95—99). Zijne vijf Nos. heeten: »Bij de afronding"; »Eene benadering in eindigen vorm" (namelijk van de disconterings-reeks in het 2e hoofdstuk); »Neperiaansche en natuurlijke logarithmen"; »Reeksen, afgeleid uit de harmonische reeks"; en »Reeksen van EISENSTEIN" (bij voorbeeld met algemeenen term $\frac{1}{(m_1{}^2 + m_2{}^2 + \ldots + m_n{}^2)^\alpha}$, waarin α positief is, terwijl iedere m elke positieve en negatieve geheele waarde verkrijgt).

Ik vlei mij, door het vorenstaande eenig denkbeeld van den rijken inhoud van het besproken, mijns inziens over het geheel met veel zorg en duidelijkheid gestelde, werk gegeven te hebben. Terwijl ik het in veler handen wensch, acht ik de mededeeling te dezer plaatse van enkele opmerkingen van ondergeschikten aard te minder noodig, omdat daarvan wellicht iets zal voorkomen in een bijvoegsel, dat de schrijver vermoedelijk binnen kort ter beschikking zal stellen van de koopers van zijn geschrift.

MEETKUNDIGE PLAATSEN BIJ STELSELS VAN KROMME LIJNEN, [O.2]

DOOR

Dr. H. EKAMA.

Laat men in de vergelijking eener kromme lijn een der parameters veranderen, dan verkrijgt men een stelsel van lijnen, die alle aan een bepaalde vergelijking voldoen. Deze kan men voorstellen door $F(x, y) = a$, in welke formule a de parameter is, aan welken men alle waarden kan toekennen. Zoo zal bij voorbeeld $x^2 + y^2 = a^2$ een stelsel concentrische cirkels voorstellen.

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{d\,y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hierin geeft $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ de meetkundige plaats van de toppen ten opzichte van de X-as [1]) voor alle kromme lijnen, die tot het stelsel behooren; en $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ is de meetkundige plaats van de toppen ten opzichte van de Y-as.

---

1) Hiermede worden bedoeld de punten, waar y een maximum of minimum bereikt.

Kiezen wij tot voorbeeld een stelsel lemniscaten, wier brandpunten samenvallen; deze worden voorgesteld door de formule

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4 = p^4,$$

waarin p verandert.

Voor de toppen ten opzichte van de X-as hebben wij dus

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2+y^2) - 4a^2x = 0,$$

bijgevolg $x = 0$ en $x^2+y^2 = a^2$; de meetkundige plaatsen zijn dus de Y-as en een cirkel met den straal a.

Voor de toppen ten opzichte van de Y-as

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2+y^2) + 4a^2y = 0,$$

$y = 0$ geeft de X-as en de kromme $x^2+y^2+a^2=0$ is onbestaanbaar.

Is het stelsel in den vorm $f(x, y, a) = 0$ gegeven, dan is

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad \text{(2)}$$

en voor elken top ten opzichte van de X-as moet $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, en voor elken ten opzichte van de Y-as $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ zijn. Elimineert men met behulp van $f(x, y, a) = 0$ den parameter a uit deze vergelijkingen, dan vindt men de gezochte meetkundige plaatsen.

Een stelsel cirkels, die elkander in één punt aanraken, wordt voorgesteld door

$$x^2 - 2xa + y^2 = 0.$$

Nu is

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-a) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y.$$

De laatste vorm geeft dadelijk $y = 0$, dus de X-as; en de eerste na eliminatie $x^2 - 2x^2 + y^2 = 0$ of $x = \pm y$, bijgevolg de lijnen, die de hoeken tusschen de assen middendoor deelen.

Is het stelsel op poolcoördinaten $F(r, \varphi) = a$ gegeven, dan is

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi} : \frac{\partial F}{\partial r}.$$

$\frac{\partial F}{\partial r} = 0$ stelt de meetkundige plaats voor van alle punten, waar de raaklijn loodrecht op den voerstraal staat, en $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$ de meetkundige plaats van de punten, waar de raaklijn door den oorsprong gaat.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \varphi - r \sin \varphi} = -\frac{-\frac{\partial F}{\partial \varphi} \sin \varphi + r \frac{\partial F}{\partial r} \cos \varphi}{\frac{\partial F}{\partial \varphi} \cos \varphi + r \frac{\partial F}{\partial r} \sin \varphi}.$$

Voor de meetkundige plaats der toppen ten opzichte der X-as moet de teller $= 0$, voor die der toppen ten opzichte der Y-as de noemer $= 0$ zijn. Overeenkomstige formulen verkrijgt men als het stelsel in den vorm $f(r, \varphi, a) = 0$ gegeven is. Men vindt dan voor de toppen ten opzichte van de X-as $-\frac{\partial f}{\partial \varphi} \sin \varphi + r \frac{\partial f}{\partial r} \cos \varphi = 0$, en voor die ten opzichte van de Y-as $\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cos \varphi + r \frac{\partial f}{\partial r} \sin \varphi = 0$; uit welke vormen de parameter a door middel van $f(r, \varphi, a) = 0$ moet geëlimineerd worden, om de gezochte meetkundige plaatsen te vinden.

Om de meetkundige plaats van de buigpunten te vinden, hebben wij uit (1)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{d y}\right)^2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{dx} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \right\};$$

bijgevolg

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \right\}.$$

Wanneer niet $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ is, zoo is

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad . . (3)$$

de meetkundige plaats der buigpunten voor het gegeven stelsel.

Is het stelsel in den vorm $f(x, y, a) = 0$ gegeven, zoo heeft men op overeenkomstige wijze voor een buigpunt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0, \quad . . (4)$$

en vindt men dus door eliminatie van a door middel van $f(x, y, a) = 0$ de gezochte meetkundige plaats.

Van beide gevallen willen wij een voorbeeld geven. Voor een stelsel lemniscaten met dezelfde brandpunten is

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = p^4 - a^4,$$

dus

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x\{x^2 + y^2 - a^2\}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y\{x^2 + y^2 + a^2\},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4\{3x^2 + y^2 - a^2\}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 8xy, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4\{x^2 + 3y^2 + a^2\}.$$

Door substitutie dezer waarden in formule (3) komt er

$$64y^2\{x^2+y^2+a^2\}^2\{3x^2+y^2-a^2\} - 256x^2y^2\{(x^2+y^2)^2-a^4\} + $$
$$+ 64x^2(x^2+y^2-a^2)^2(x^2+3y^2+a^2) = 0,$$

$$2x^2y^2[(x^2+y^2+a^2)^2 - 2\{(x^2+y^2)^2-a^4\} + (x^2+y^2-a^2)^2] +$$
$$+ (x^2+y^2+a^2)(x^2+y^2-a^2)\{(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)\} = 0,$$

$$8a^4x^2y^2 + \{(x^2+y^2)^2 - a^4\}\{(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)\} = 0,$$

$$(x^2+y^2)^2\{(x^2+y^2)^2 + a^2(x^2-y^2)\} + 8a^4x^2y^2 - 2a^2(x^2+y^2)^2 .$$
$$. (x^2-y^2) - 2a^4(x^2+y^2)^2 + a^4\{(x^2+y^2)^2 + a^2(x^2-y^2)\} = 0;$$

dus

$$\{(x^2+y^2)^2 + a^2(x^2-y^2)\}\{(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4\} = 0.$$

$(x^2 + y^2)^2 + a^2(x^2 - y^2) = 0$ geeft voor de meetkundige plaats der buigpunten de lemniscaat van BERNOUILLI.

$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4$ kunnen wij in den vorm schrijven

$$(x^2 - y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = -4x^2y^2,$$

en bijgevolg is deze meetkundige plaats onbestaanbaar.

Als tweede voorbeeld zoeken wij de meetkundige plaats der buigpunten van een stelsel gelijkvormige lemniscaten; bij deze is dus $\frac{a}{p} = \frac{1}{n}$ standvastig. De vergelijking is

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = (n^4 - 1)a^4.$$

Volgens formule (4) vinden wij

$$8a^4x^2y^2 + \{(x^2+y^2)^2 - a^4\}\{(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)\} = 0,$$

en door middel van de gegeven vergelijking

$$8a^4x^2y^2 + \{(n^4-1)a^4 + \\ + 2a^2(x^2-y^2) - a^4\}\{(n^4-1)a^4 + a^2(x^2-y^2)\} = 0,$$

$$8x^2y^2 + (n^4-2)(n^4-1)a^4 + \\ + (3n^4-4)(x^2-y^2)a^2 + 2(x^2-y^2)^2 = 0,$$

$$(n^4-2)(x^2+y^2)^2 - (n^4-2)\,2a^2(x^2-y^2) + \\ + 2(x^2+y^2)^2 + (3n^4-4)(x^2-y^2)a^2 = 0;$$

bijgevolg

$$(x^2+y^2)^2 + a^2(x^2-y^2) = 0 \quad \text{of} \quad a^2 = -\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2};$$

dus na substitutie in de gegeven vergelijking

$$(x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2)^2 = (n^4-1)\frac{(x^2+y^2)^4}{(x^2-y^2)^2},$$

$$3(x^2-y^2)^2 = (n^4-1)(x^2+y^2)^2,$$

of

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{n^4-1}{3}},$$

en op poolcoördinaten

$$\cos 2\phi = \sqrt{\frac{n^4-1}{3}}.$$

De meetkundige plaats zijn dus rechte lijnen, die door den oorsprong gaan. Zij wordt onbestaanbaar voor $n^4 < 1$ en $n^4 > 4$, en is dus bestaanbaar voor $1 < n < \sqrt{2}$; zooals te verwachten was. In dit geval hadden wij den gevolgden weg kunnen bekorten door eerst volgens (2) $\frac{dy}{dx}$ te bepalen, hieruit door den vorm $f(x, y, a) = 0$, a te elimineeren en dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ te zoeken.

Wij kunnen ons de vraag stellen, om een stelsel kromme lijnen te bepalen, die een gegeven stelsel steeds onder een gegeven hoek α snijden. Noemen wij den hoek, dien de raaklijn in een punt van een kromme van het eene stelsel met de X-as maakt, τ, en den hoek, dien de raaklijn in dat

punt van de kromme van het andere stelsel met die as vormt, τ', dan moet steeds $\tau' = \alpha + \tau$ zijn, dus

$$tg\,\tau' = \frac{tg\,\alpha + tg\,\tau}{1 + tg\,\alpha\,.\,tg\,\tau} \text{ of } \frac{d\,y_2}{d\,x_2} = \frac{tg\,\alpha + \dfrac{d\,y_1}{d\,x_1}}{1 - tg\,\alpha\,\dfrac{d\,y_1}{d\,x_1}} \; . \; . \; . \; (5)$$

In vele gevallen is de vorm op poolcoördinaten eenvoudiger toe te passen.

$$cot\,(\tau - \Phi_1) = \frac{1}{r_1}\,\frac{d\,r_1}{d\,\Phi_1} \text{ en } cot\,(\tau' - \Phi_2) = \frac{1}{r_2}\,\frac{d\,r_2}{d\,\Phi_2}.$$

Nu moet $\alpha = \tau' - \tau$ zijn of $\alpha = (\tau' - \Phi_2) - (\tau - \Phi_1)$, want in het snijpunt is $r_1 = r_2$ en $\Phi_1 = \Phi_2$; bijgevolg

$$tg\,\alpha = \frac{\dfrac{1}{r_1}\,\dfrac{d\,r_1}{d\,\Phi_1} - \dfrac{1}{r_2}\,\dfrac{d\,r_2}{d\,\Phi_2}}{1 + \dfrac{1}{r_1}\,\dfrac{1}{r_2}\,\dfrac{d\,r_1}{d\,\Phi_1}\,\dfrac{d\,r_2}{d\,\Phi_2}} \text{ en } \frac{1}{r_2}\,\frac{d\,r_2}{d\,\Phi_2} = \frac{\dfrac{1}{r_1}\,\dfrac{d\,r_1}{d\,\Phi_1} - tg\,\alpha}{1 + \dfrac{1}{r_1}\,\dfrac{d\,r_1}{d\,\Phi_1}\,tg\,\alpha}. \; (6)$$

Een stelsel rechte lijnen, die elkander in een punt snijden, is gegeven door

$$\Phi_1 = A, \text{ dus } d\,\Phi_1 = 0, \text{ derhalve } \frac{r_1\,d\,\Phi_1}{d\,r_1} = 0;$$

bijgevolg

$$\frac{1}{r_2}\,\frac{d\,r_2}{d\,\Phi_2} = cotg\,\alpha;$$

na integratie

$$r_2 = C\,e^{\Phi_2\,cotg\,\alpha}.$$

Voor een stelsel concentrische cirkels is

$$r_1 = a, \text{ dus } d\,r_1 = 0, \text{ derhalve } \frac{1}{r_1}\,\frac{d\,r_1}{d\,\Phi_1} = 0;$$

bijgevolg

$$\frac{1}{r_2}\,\frac{d\,r_2}{d\,\Phi_2} = -\,tg\,\alpha;$$

en wij vinden

$$r_2 = C\,e^{-\Phi_2\,tg\,\alpha},$$

of wanneer wij Φ in tegengestelde richting tellen

$$r_2 = C\,e^{\Phi_2\,tg\,\alpha}.$$

Voor beide gevallen vinden wij overeenkomstige stelsels, welke geheel samenvallen, wanneer de gegeven hoeken α

elkanders complementen zijn. Dit moet ook zoo wezen, daar toch het stelsel rechte lijnen door het stelsel concentrische cirkels onder rechte hoeken gesneden wordt.

Is $\alpha = 90°$, dus heeft de snijding steeds onder een rechten hoek plaats, dan worden de formulen (5) en (6)

$$\frac{d\,y_2}{d\,x_2} = -\frac{d\,x_1}{d\,y_1} \text{ en } \frac{1}{r_2}\frac{d\,r_2}{d\,\Phi_2} = -\frac{r_1\,d\,\Phi_1}{d\,r_1} \quad \ldots\ldots (7)$$

Hebben wij een stelsel ellipsen of hyperbolen, waarbij de verhouding der assen gelijk $tg\,\eta$ is, dan zijn deze stelsels gegeven door

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{a^2\,tg^2\,\eta} = C, \text{ bijgevolg } \frac{d\,y_1}{d\,x_1} = \mp \frac{x_1}{y_1}\,tg^2\,\eta.$$

In de snijpunten is $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$, en dus voor de stelsels, die de gegevene onder rechte hoeken snijden,

$$\frac{d\,y_2}{d\,x_2} = \pm \frac{y_2}{x_2}\,cotg^2\,\eta \text{ of } \frac{d\,x_2}{x_2} = \pm \frac{d\,y_2}{y_2}\,tg^2\,\eta.$$

Door integratie vinden wij voor het stelsel, behoorende bij de ellipsen

$$x = C\,y^{tg^2\,\eta}$$

en voor dat bij de hyperbolen, $x\,y^{tg^2\,\eta} = C$.

Is in den eersten vorm $tg^2\,\eta$ meetbaar, dan bestaat het stelsel uit parabolen van hooger graad.

Zij gegeven een stelsel cissoiden, die dezelfde assen en dezelfde spits hebben, dus

$$r_1 = 2\,a\,sin\,\Phi_1\,.\,tg\,\Phi_1$$

$$\frac{d\,r_1}{d\,\Phi_1} = 2\,a\,sin\,\Phi_1\,\frac{1 + cos^2\,\Phi_1}{cos^2\,\Phi_1}.$$

Door eliminatie van a vinden wij

$$\frac{1}{r_1}\frac{d\,r_1}{d\,\Phi_1} = cotg\,\Phi_1\,\frac{1 + cos^2\,\Phi_1}{cos^2\,\Phi_1} = \frac{1 + cos^2\,\Phi_1}{sin\,\Phi_1\,cos\,\Phi_1};$$

en bijgevolg voor het gezochte stelsel

$$\frac{1}{r_2}\frac{d\,r_2}{d\,\Phi_2} = -\frac{sin\,\Phi_2\,cos\,\Phi_2}{1 + cos^2\,\Phi_2};$$

dus na integratie

$$r_2^2 = c^2\,(1 + cos^2\,\Phi_2),$$

of, op rechthoekige coördinaten overgebracht,

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2\,(2\,x^2 + y^2).$$

Deze kromme is van den vierden graad en symmetrisch ten opzichte van de assen.

Voor $\Phi = 0°$ is $r = c\sqrt{2}$; voor $\Phi = 90°$ is $r = c$; voor $\Phi = 30°$ is $r = \frac{1}{2} c \sqrt{7}$; voor $\Phi = 45°$ is $r = \frac{1}{2} c \sqrt{3}$; en voor $\Phi = 60°$ is $r = \frac{1}{2} c \sqrt{5}$; de kromme is dus gemakkelijk te construeeren. Buigpunten heeft zij niet.

Het oppervlak O is gelijk aan viermaal

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^2\, d\Phi = c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos^2\Phi)\, d\Phi = c^2 \left|\frac{3}{2}\Phi\right|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{3}{4}\pi\, c^2;$$

en dus

$$O = \frac{3}{2}\pi\, c^2.$$

In het algemeen geeft dit onderzoek kromme lijnen van weinig bekendheid; bij voorbeeld bij

$y_1^2 = 2\,p\,x_1 - (1 - \varepsilon^2)x_1^2$ $\{\varepsilon$ veranderlijk$\}$ behoort

$$y_2^2\, x_2^2 = a\, x_2^3 + b^4 \; \{b \text{ veranderlijk}\};$$

$r_1 = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos \Phi_1}$ $\{\varepsilon$ veranderlijk$\}$ behoort

$$b\, e^{\frac{r_2}{p}} = r_2 \sin \Phi_2 \; \{b \text{ veranderlijk}\};$$

$r_1 = a\,\Phi_1$ $\{a$ veranderlijk$\}$ behoort $r_2\, e^{\frac{1}{2}\Phi_2^2} = b$ $\{b$ veranderlijk$\}$;
$r_1\,\Phi_1 = a$ $\{a$ veranderlijk$\}$ behoort $r_2 = b\, e^{\frac{1}{2}\Phi_2^2}$ $\{b$ veranderlijk$\}$.

In vele gevallen is de integratie niet uit te voeren.

Het volgende geval moge iets uitvoeriger behandeld worden. Het gegeven stelsel bestaat uit cirkels met denzelfden straal p beschreven, en van welke de middelpunten op een rechte lijn liggen; dus

$$y_1^2 + (x_1 - a)^2 = p^2, \quad y_1 \frac{d\,y_1}{d\,x_1} + (x_1 - a) = 0,$$

bijgevolg

$$\frac{d\,y_1}{d\,x_1} = \frac{\sqrt{p^2 - y_1^2}}{y_1}, \text{ dus } \frac{d\,y_2}{d\,x_2} = -\frac{y_2}{\sqrt{p^2 - y_2^2}},$$

of

$$d\,x_2 = -\frac{\sqrt{p^2 - y_2^2}}{y_2}\, d\,y_2.$$

Stel $y_2 = p \sin\psi$, dan is $d\,y_2 = p\cos\psi\, d\psi$, en

$$d\,x_2 = -p\frac{\cos^2\psi}{\sin\psi}\, d\psi.$$

De integratie geeft

$$\frac{x_2 + C}{p} = - l\, tg\, \tfrac{1}{2} \psi - \cos \psi.$$

Bij het onderzoek dezer kromme kunnen wij het teeken omkeeren en de standvastige weglaten; want deze geeft slechts een verschuiving van de Y-as.

$$y = 0 \text{ voor } \sin \psi = 0, \text{ dan is } x = \infty;$$

$$y = p \text{ voor } \sin \psi = 1, \text{ dan is } x = 0.$$

De lijn der middelpunten is asymptoot, en de kromme heeft een keerpunt op de gemeenschappelijke raaklijn der cirkels. Het oppervlak tusschen de kromme en de asymptoot is gelijk

$$\int y\, d\, x = 2\, p^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \psi\, d\, \psi = \tfrac{1}{2}\, \pi\, p^2,$$

bijgevolg gelijk aan het halve oppervlak van een der cirkels.

Uit de vorm der vergelijkingen laat zich verwachten, dat de kromme een cycloidale lijn, voortgebracht bij de rolling eener kromme lijn langs de lijn der middelpunten, zal zijn. Het stuk der normaal tusschen de kromme en de richtlijn is

$$r = p\, tg\, \psi,$$

en

$$\frac{d\, y_2}{d\, x_2} = - tg\, \psi = \frac{1}{r} \frac{d\, r}{d\, \Phi};$$

bijgevolg

$$- p \frac{d\, r}{r^2} = d\, \Phi;$$

dus

$$p = r\, \Phi.$$

De lijn, die dus langs de lijn der middelpunten moet rollen is de hyperbolische spiraal, en de oorsprong is het beschrijvende punt. Het punt op de raaklijn wordt bij een eindige snelheid in oneindig grooten tijd bereikt.

Zijn de vergelijkingen van twee stelsels, die elkander loodrecht snijden,

$$F(x_1\, y_1) = a \quad \text{en} \quad F'(x_2\, y_2) = b;$$

dan is

$$\frac{d\, y_1}{d\, x_1} = - \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial y_1} \quad \text{en} \quad \frac{d\, y_2}{d\, x_2} = - \frac{\partial F'}{\partial x_2} : \frac{\partial F'}{\partial y_2}.$$

Nu moet volgens (7) $\frac{d y_1}{d x_1} = - \frac{d x_2}{d y_2}$ zijn, dus

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial y_1} = - \frac{\partial F'}{\partial y_2} : \frac{\partial F'}{\partial x_2} \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

Is nu $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$, dan is ook $\frac{\partial F'}{\partial y_2} = 0$; en voor $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$, is $\frac{\partial F'}{\partial x_2} = 0$; wat ons leert, dat de meetkundige plaats van de toppen ten opzichte van de X-as in het eene stelsel bij het andere de meetkundige plaats is voor de toppen ten opzichte van de Y-as.

Door differentiatie van (8) naar x_1 vinden wij

$$\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\, d y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right\} : \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 =$$
$$= - \frac{d y_2}{d x_1}\left\{\frac{\partial^2 F'}{\partial y_2^2}\frac{\partial F'}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F'}{\partial x_2\, \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right\} : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2,$$

en naar y_1

$$\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\, \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right\} : \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 =$$
$$= - \frac{d x_2}{d y_1}\left\{\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2\, \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F'}{\partial x_2^2}\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right\} : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2.$$

Wij vermenigvuldigen den bovensten vorm met $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ en den ondersten met $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ en tellen op.

$$\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\, \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2\right\} : \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^3 =$$
$$= \frac{d y_2}{d x_1}\left\{\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2\, \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial x_2}\frac{\partial F'}{\partial y_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_2^2}\left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2\right\} : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^3.$$

Bij deze afleiding is (8) gebruikt, en verder is toch volgens (7)

$$\frac{d y_2}{d x_1} = - \frac{d x_2}{d y_1}.$$

Uit de formule blijkt, dat wanneer voor het eene stelsel een meetkundige plaats voor de buigpunten bestaat, deze tevens de meetkundige plaats voor de buigpunten van het andere stelsel is.

Gebruik makende van de formule (7), kunnen wij op een eenvoudige wijze aantoonen, dat, wanneer het eene stelsel de formule

$$r_1^n = a^n \cos n \Phi_1$$

heeft, dit stelsel onder een hoek α gesneden wordt door een zelfde stelsel, wanneer de assen van beide stelsels een hoek $\frac{1}{n}\alpha$ met elkander maken [1]).

$$\frac{1}{r_1}\frac{d r_1}{d \Phi_1} = - tg\, n \Phi_1,$$

en dus daar $r_1 = r_2$ en $\Phi_1 = \Phi_2$ in de snijpunten is;

$$\frac{1}{r_2}\frac{d r_2}{d \Phi_2} = - \frac{tg\, n \Phi_2 + tg\, \alpha}{1 - tg\, \alpha\, tg\, n \Phi} = - tg\,(n \Phi_2 + \alpha),$$

$$n \frac{d r_2}{r_2} = \frac{d\, n \Phi_2}{cotg\,(n \Phi_2 + \alpha)};$$

dus

$$r_2^n = c^n \cos (n \Phi_2 + \alpha).$$

n kan alle waarden hebben. De meest voorkomende zijn; voor
$n = 1$, cirkels, die elkander in één punt raken;
$n = -1$, evenwijdige rechte lijnen;
$n = 2$, lemniscaten van Bernouilli met denzelfden oorsprong;
$n = -2$, gelijkzijdige hyperbolen met dezelfde asymptoten;
$n = \frac{1}{2}$, cardioïden;
en
$n = -\frac{1}{2}$, parabolen met hetzelfde brandpunt.

De formulen (5) en (6) kunnen ons helpen om, wanneer twee stelsels gegeven zijn, de meetkundige plaats van de punten te bepalen, waar de snijding onder een bepaalden hoek plaats heeft. Daartoe schrijven wij de formulen in den vorm

$$tg\, \alpha = \frac{\frac{d y_1}{d x_1} - \frac{d y_2}{d x_2}}{1 + \frac{d y_1}{d x_1}\frac{d y_2}{d x_2}} = \frac{\frac{1}{r_2}\frac{d r_2}{d \Phi_2} - \frac{1}{r_1}\frac{d r_1}{d \Phi_1}}{1 + \frac{1}{r_1}\frac{1}{r_2}\frac{d r_1}{d \Phi_1}\frac{d r_2}{d \Phi_2}}.$$

---

1) Muurling. Dissertatie. Groningen 1870. Bl. 81.

Nemen wij tot voorbeeld twee stelsels rechte lijnen, die elkander in een punt snijden. Zij de afstand der beide snijpunten $= 2\,b$, dan is het eene stelsel $y_1 = A(x_1 + b)$, en het andere $y_2 = B(x_2 - b)$;

$$\frac{d\,y_1}{d\,x_1} = A = \frac{y_1}{x_1 + b} \quad \text{en} \quad \frac{d\,y_2}{d\,x_2} = B = \frac{y_2}{x_2 - b}.$$

Voor de meetkundige plaats is $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$; dus

$$tg\,\alpha = \frac{2\,b\,y}{x^2 - b^2 + y^2},$$

of

$$x^2 + y^2 - b^2 = b\,y\,cotg\,\alpha.$$

Deze meetkundige plaatsen zijn dus, zooals wij verwachten konden, cirkels, die door de snijpunten gaan.

Voor tweede voorbeeld kiezen wij twee stelsels confocale lemniscaten, die denzelfden oorsprong hebben, doch waarvan de lijnen, die door de brandpunten gaan, loodrecht op elkander staan.

Voor het eene is

$$r_1^{\,4} - 2\,a^2\,r_1^{\,2}\,cos\,2\,\Phi_1 = p_1^{\,4} - a^4,$$

en voor het andere

$$r_2^{\,4} + 2\,a^2\,r_2^{\,2}\,cos\,2\,\Phi_2 = p_2^{\,4} - a^4;$$

dus

$$\frac{1}{r_1}\frac{d\,r_1}{d\,\Phi_1} = -\frac{a^2\,sin\,2\,\Phi_1}{r_1^{\,2} - a^2\,cos^2\,\Phi_1} \quad \text{en} \quad \frac{1}{r_2}\frac{d\,r_2}{d\,\Phi_2} = \frac{a^2\,sin\,2\,\Phi_2}{r_2^{\,2} + a^2\,cos\,2\,\Phi_2}.$$

In het snijpunt is weer $r_1 = r_2$ en $\Phi_1 = \Phi_2$, dus

$$tg\,\alpha = \frac{2\,a^2\,r^2\,sin\,2\,\Phi}{r^4 - a^4},$$

of

$$r^4 - 2\,a^2\,r^2\,cotg\,a\,sin\,2\,\Phi = a^4.$$

Deze meetkundige plaatsen zijn dus ook lemniscaten, doch de assen maken met de oorspronkelijke assen hoeken van 45°.

Voor het eene stelsel kunnen wij een stelsel rechte lijnen nemen, die door een punt met de coördinaten a en b gaan, en de meetkundige plaats zoeken van de punten, waarin de kromme lijnen van een ander stelsel onder een hoek α gesneden worden. Het stelsel rechte lijnen is gegeven door de formule

$$(x_1 - a)\, tg\, A = y_1 - b \text{ dus } \frac{d\,y_1}{d\,x_1} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a};$$

en wij vinden dus

$$tg\, \alpha = \frac{(y-b) - (x-a)\dfrac{d\,y_2}{d\,x_2}}{(x-a) + (y-b)\dfrac{d\,y_2}{d\,x_2}}.$$

Is $\alpha = 90°$, — dat wil zeggen, de rechte lijnen zijn normalen voor de kromme lijnen, — dan moet

$$(x-a) + (y-b)\frac{d\,y_2}{d\,x_2} = 0$$

zijn; voor $\alpha = 0°$, — dan raken de rechte lijnen aan de krommen van het stelsel, — is

$$(y-b) - (x-a)\frac{d\,y_2}{d\,x_2} = 0.$$

Uit beide formulen blijkt, dat er aan voldaan is, door $x = a$ en $y = b$; bijgevolg gaat de gezochte meetkundige plaats door het gegeven punt. Wat de kegelsneden betreft, zijn deze meetkundige plaatsen door Schlömilch onderzocht.

Heeft men twee stelsels, die elkander rechthoekig snijden, en een punt, waardoor de rechte lijnen gaan, dan is natuurlijk de meetkundige plaats voor de normaalpunten van het eene stelsel eveneens de meetkundige plaats voor de raakpunten in het andere.

---

1) Schlömilch, Zeitschrift. Bd. XXIII. S. 337—339.

OVER HET QUOTIENT VAN TWEE RUIMTE-VECTOREN,

EN

OVER EEN QUATERNION, [B 12 d]

DOOR

Dr. Th. B. VAN WETTUM [1]).

---

1. Een wijze om te gemoet te komen aan de bezwaren, die van verschillende zijden geopperd zijn tegen mijne beschouwingen, inzonderheid met betrekking tot de theorie der quaternions, is, door alsnog aan mijn onderzoek een vorm te ontleenen voor het quotient van twee willekeurige vectoren in de ruimte. Daarna doe ik zien, hoe een tusschenplaats kan worden ingenomen door een soort quaternion als stelkundig symbool van een vectoren-verband.

2. Om tot genoemden vorm te geraken, brengen wij een willekeurigen eenheidsvector (x, y, z) in verbinding met een vasten eenheidsvector, waartoe wij in staat zijn door het ten grondslag leggen van een vast coördinaten-stelsel. Ten behoeve der symmetrie kiezen wij voor vasten vector dien, welke met de positieve richtingen der drie coördinaten-assen gelijke scherpe hoeken maakt: bij onze wijze van voorstellen is deze $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, zoo ε de volstrekte waarde van $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ voorstelt.

---

1) Dit stukje werd in 1892 aangeboden, maar konde eerst in November 1893 worden opgenomen. D. B. D. H.

3. Om nu in de vergelijkingen

$$(x, y, z) = Q\,(a, b, c, d)\,(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

a, b, c en d te bepalen, binden wij k_1, k_2 en k_3 aan de voorwaarde, dat de overeenkomstige as van wenteling zal liggen in het vaste vlak, door den oorsprong loodrecht op den gekozen vasten vector gebracht.

Deze voorwaarde wordt

$$\cos k_1 + \cos k_2 + \cos k_3 = 0,$$

of

$$b + c + d = 0;$$

en men vindt gemakkelijk

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos p = \frac{x+y+z}{3\,\varepsilon}, \\ b &= \sin p \,.\, \cos k_1 = \frac{z-y}{3\,\varepsilon}, \\ c &= \sin p \,.\, \cos k_2 = \frac{x-z}{3\,\varepsilon}, \\ d &= \sin p \,.\, \cos k_3 = \frac{y-x}{3\,\varepsilon}, \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

Men overtuige zich door een eenvoudige bolbeschouwing van de juiste keuze der teekens.

4. Voor elken eenheidsvector vinden wij dus

$$(x, y, z) = Q\left(\frac{x+y+z}{3\,\varepsilon}, \frac{z-y}{3\,\varepsilon}, \frac{x-z}{3\,\varepsilon}, \frac{y-x}{3\,\varepsilon}\right)(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon),$$

en omgekeerd

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) = Q\left(\frac{x+y+z}{3\,\varepsilon}, \frac{y-z}{3\,\varepsilon}, \frac{z-x}{3\,\varepsilon}, \frac{x-y}{3\,\varepsilon}\right)(x, y, z),$$

zooals gemakkelijk uit de wijze van samenstelling van den matrix Q volgt.

Aldus zijn wij in staat, door middel van den vasten vector $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ twee willekeurige eenheidsvectoren met elkaar in verbinding te brengen.

Wij vinden toch uit de twee stelsels vergelijkingen

$$(x_2, y_2, z_2) = Q\left(\frac{x_2+y_2+z_2}{3\,\varepsilon}, \frac{z_2-y_2}{3\,\varepsilon}, \frac{x_2-z_2}{3\,\varepsilon}, \frac{y_2-x_2}{3\,\varepsilon}\right)(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon),$$

en

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) = Q\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3\varepsilon}, \frac{y_1-z_1}{3\varepsilon}, \frac{z_1-x_1}{3\varepsilon}, \frac{x_1-y_1}{3\varepsilon}\right)(x_1, y_1, z_1),$$

het nieuwe stelsel

$$(x_2, y_2, z_2) = Q\left(\frac{x_2+y_2+z_2}{3\varepsilon}, \frac{z_2-y_2}{3\varepsilon}, \frac{x_2-z_2}{3\varepsilon}, \frac{y_2-x_2}{3\varepsilon}\right) \times$$

$$\times\, Q\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3\varepsilon}, \frac{y_1-z_1}{3\varepsilon}, \frac{z_1-x_1}{3\varepsilon}, \frac{x_1-y_1}{3\varepsilon}\right)(x_1, y_1, z_1) \quad . \ (3)$$

5. In aanmerking nemende, dat

$$Q(a, b, c, d) \,.\, Q(a, -b, -c, -d) = Q(1, 0, 0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

is, en dus eenige grond bestaat dit product als nietwentelaar één te noemen, komt men er toe te schrijven

$$Q(a, -b, -c, -d) = \frac{1}{Q(a, b, c, d)},$$

en ook omgekeerd

$$Q(a, b, c, d) = \frac{1}{Q(a, -b, -c, -d)}. \quad \ldots\ldots (4)$$

Onder het noodige voorbehoud kan men dus uit het gevonden stelsel vergelijkingen symbolisch besluiten tot de volgende:

$$\frac{(x_2, y_2, z_2)}{(x_1, y_1, z_1)} = Q\left(\frac{x_2+y_2+z_2}{3\varepsilon}, \frac{z_2-y_2}{3\varepsilon}, \frac{x_2-z_2}{3\varepsilon}, \frac{y_2-x_2}{3\varepsilon}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{Q\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3\varepsilon}, \frac{z_1-y_1}{3\varepsilon}, \frac{x_1-z_1}{3\varepsilon}, \frac{y_1-x_1}{3\varepsilon}\right)};$$

òf

$$\frac{(x_2, y_2, z_2)}{(x_1, y_1, z_1)} = \frac{Q\left(\frac{x_2+y_2+z_2}{3\varepsilon}, \frac{z_2-y_2}{3\varepsilon}, \frac{x_2-z_2}{3\varepsilon}, \frac{y_2-x_2}{3\varepsilon}\right)}{Q\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3\varepsilon}, \frac{z_1-y_1}{3\varepsilon}, \frac{x_1-z_1}{3\varepsilon}, \frac{y_1-x_1}{3\varepsilon}\right)}, \ . \ (5)$$

waarmede de gewenschte quotient-vorm is verkregen.

Het is een radiaal vectoren-quotient, en hangt, door de betrekkingen

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1,$$

nog van vier onafhankelijk veranderlijke grootheden af, zooals ook zijn moest [1]).

6. De quaternion is ook als vectoren-quotient begonnen; maar HAMILTON heeft terstond zijne bepaling van gelijkheid van twee vectoren-quotienten gegeven, waardoor hij voor een radiaal vectoren-quotient een uitdrukking met maar drie onafhankelijke grootheden vond.

Laat ons zien, wat daarvan naar onze wijze van beschouwing wordt; en keeren wij daartoe terug tot den vorm Q_0 van onzen matrix Q, namelijk

$$Q_0 = \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Wij vonden de vergelijkingen

$$(x_2, y_2, z_2) = Q_0\,(a, b, c, d)\,(x_1, y_1, z_1), \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

onder de voorwaarde

$$b\,x_1 + c\,y_1 + d\,z_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Stellen wij deze laatste in verbinding met de drie voorgaande, dan krijgen wij vier betrekkingen, die wij schrijven in den vorm

$$(0, x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} 0, & x_1, & y_1, & z_1 \\ x_1, & 0, & z_1, & -y_1 \\ y_1, & -z_1, & 0, & x_1 \\ z_1, & y_1, & -x_1, & 0 \end{vmatrix} (a, b, c, d)\,. \quad (8)$$

Daar de determinant op dezen matrix

$$-\,(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2)^2$$

blijkt te zijn, lossen wij a, b, c en d op en vinden gemakkelijk

1) Zooals hier de afleiding is geschied, hangt ook een radiaal quotient nog van vier onafhankelijk-veranderlijken $\frac{y_1}{x_1}$, $\frac{z_1}{x_1}$, $\frac{y_2}{x_2}$, $\frac{z_2}{x_2}$ af, wat ook meetkundig a priori is te zien.

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ b &= \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ c &= \frac{z_1 x_2 - z_2 x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ d &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

7. Wij hebben dus in de vergelijkingen

$$(x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} (x_1, y_1, z_1).$$

voor de waarden (9) van de elementen van den matrix een identieken vervormer van den ruimte-vector.

Het komt mij gevaarlijk voor zoodanige uitdrukking een operator te noemen; maar afgezien daarvan moet toch Dr. VAN ELFRINKHOF in het belang zijner eigen redeneering loslaten zijne vermeende volmaakte overeenstemming van Q_0 en een quaternion.

Welken vector (x_3, y_3, z_3) ik ook aan de bewerking, aangeduid door Q_0, onderwerp, men krijgt altijd één bepaalden vector, hoewel ik in het algemeen niet zou durven aanwijzen, hoe die door eenvoudige meetkundige constructie gevonden wordt.

Op de tweede bladzijde der »Opmerkingen" heet het, dat de operatie q op een vector α in het algemeen een quaternion tot product geeft. Hoewel mij dit niet duidelijk is, en ook op de laatste bladzijde alleen wordt gezegd, dat $q\alpha$ doodeenvoudig geen draaiing is, zeker is het dat Q_0 en q hier geheel niet overeenstemmen.

8. Eenmaal ingezien hebbende, hoe de vergelijkingen

$$(x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} a_2 & -d_2 & c_2 \\ d_2 & a_2 & -b_2 \\ -c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} (x_1, y_1, z_1),$$

en

$$(x_1, y_1, z_1) = \begin{vmatrix} a_1 & -d_1 & c_1 \\ d_1 & a_1 & -b_1 \\ -c_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix} (x_0, y_0, z_0),$$

als identieke vervormers in de ruimte dienst kunnen doen, besluit men gemakkelijk tot

$$(x_2,y_2,z_2)=\begin{vmatrix} a_2a_1-d_2d_1-c_2c_1, & -a_2d_1-d_2a_1+c_2b_1, & a_2c_1+d_2b_1+c_2a_1 \\ d_2a_1+a_2d_1+b_2c_1, & -d_2d_1+x_2a_1-b_2b_1, & d_2c_1-a_2b_1-b_2a_1 \\ -c_2a_1+b_2d_1-a_2c_1, & c_2d_1+b_2a_1+a_2b_1, & -c_2c_1-b_2b_1-a_2a_1 \end{vmatrix}(x_0,y_0,z_0).$$

Met behulp der betrekkingen

$$\begin{aligned} a_3 &= -a_2a_1-b_2b_1-c_2c_1-d_2d_1, \\ b_3 &= -a_2b_1-b_2a_1-c_2d_1+d_2c_1, \\ c_3 &= -a_2c_1+b_2d_1-c_2a_1-d_2b_1, \\ d_3 &= -a_2d_1-b_2c_1+c_2b_1-d_2a_1, \end{aligned}$$

wordt dit

$$(x_2,y_2,z_2)=\begin{vmatrix} a_3+b_2b_1, & d_3+b_2c_1, & -c_3+b_2d_1 \\ -d_2+c_2b_1, & a_3+c_2c_1, & b_3+c_2d_1 \\ c_3+d_2b_1, & -b_3+d_2c_1, & a_3+d_2d_1 \end{vmatrix}x_0,y_0,z_0),$$

dus door de bekende betrekking

$$b_1x_0+c_1y_0+d_1z_0=0,$$

$$(x_2,y_2,z_2)=\begin{vmatrix} a_3 & d_3 & -c_3 \\ -d_3 & a_3 & b_3 \\ c_8 & -b_3 & a_3 \end{vmatrix}(x_0,y_0,z_0),$$

met andere woorden symbolisch

$$\begin{vmatrix} a_2 & -d_2 & c_3 \\ d_2 & a_2 & -b_2 \\ -c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a_1 & -d_1 & c_1 \\ d_1 & a_1 & -b_1 \\ -c_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_3 & d_3 & -c_3 \\ -d_3 & a_3 & b_3 \\ c_3 & -b_3 & a_3 \end{vmatrix},$$

zijnde juist wat HAMILTON bewijst met zijn produkt van twee quaternions in den vorm

$$(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)=a_3-b_3i-c_3j-d_3k.$$

9. De uitkomst dezer laatste vermenigvuldiging wordt verkregen met behulp van de bekende betrekkingen naar HAMILTON, als bijvoorbeeld

$$ij=k.$$

Toetsen wij deze, steeds tot overtuiging, aan onze uitkomsten.

Wij vonden

$$ij=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},\quad k=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zal nu $ij\,(a, b, c) = k\,(a, b, c)$ zijn, dan moet te gelijk

$$c = -b \text{ en } b = c$$

zijn, dus

$$b = c = 0.$$

De formule $ij = k$ geldt dus alleen, wanneer de gewentelde vector in de x-as ligt, en evenzoo voor de overige formulen; men kan zich ook hiervan gemakkelijk overtuigen.

De kunstmatigheid der stelkundige theorie der quaternions springt hier mijns inziens steeds duidelijker in het oog.

10. Ik heb onduidelijk mijne bedoeling geuit aan het slot van **21** en in **22** van mijn stukje (in Dl. XVIII), waar ik daar sprak van een betrekking tusschen b, c en d, die in Q_0 voorkomen.

Er is daar blijkbaar verwarring tusschen

$$Q_0 = \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix},$$

en

$$q_0 = a + b\,i + c\,j + d\,k.$$

Mijne bedoeling aldaar was eenvoudig deze: zal ik met den vereenvoudigden matrix bijvoorbeeld (3, 4, 5) kunnen wentelen, dan moet in dien matrix

$$3\,b + 4\,c + 5\,d = 0$$

zijn. Dit is de genoemde tweede betrekking.

Het zal dan ook niemand verwonderen, dat ik eerst geloofde, werkelijk de identiteit van Q_0 en q_0 te hebben bewezen.

11. Ten slotte zij het, ook Dr. VAN ELFRINKHOF, gebleken, dat ik geen aanval heb ondernomen tegen het meetkundig gebruik van de quaternions, al zal dit ook mogelijk hier en daar een kleine wijziging moeten ondergaan. Het begin van mijn eerste stukje (Dl. XVII) geeft duidelijk aan, dat ik van den aanvang af het oog heb op de stelkundige gronden der theorie.

Waar ik gaarne met Dr. VAN ELFRINKHOF de vereering van HAMILTON en zijn werken deel, mag ik hem verwijzen

naar Dl. I van dit Tijdschrift en naar gezaghebbende leerboeken der algebra, zoo in Nederland als in Engeland, waar beweringen over quaternions bestaan, die tegen alle gezond verstand indruischen, opdat hij met mij de noodzakelijkheid inzie van een juisten en begrijpelijken stelkundigen grondslag [1]).

1) Een korte maar zaakrijke afleiding van de grondslagen der theorie van HAMILTON is in bewerking en zal eerlang het licht zien.

DE VERGELIJKING $V\rho\Phi\rho=0$, [B 12 d]

DOOR

Dr. L. VAN ELFRINKHOF.

A. *Algemeen geval.*

Wanneer $\Phi\rho$ een lineaire vector-functie van een veranderlijken vector ρ voorstelt, die voldoet aan de eigenschappen

$$\Phi(\rho+\sigma)=\Phi\rho+\Phi\sigma,$$

en de daaruit afgeleide

$$\Phi(x\,\Phi)=x\,\Phi\rho,$$

dan doet zich dikwijls de vraag voor, wanneer of de functie Φ den vector wel van grootte, maar niet van richting doet veranderen; met andere woorden, wanneer is

$$V\rho\Phi\rho=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Deze vergelijking treedt op bij het zoeken der hoofdassen van een quadratisch oppervlak, bij vraagstukken van werktuigkunde en natuurkunde, enz. In het groote werk van HAMILTON »Elements of Quaternions" vindt men in de §§ 353—356 wel het een en ander, dat ons op weg kan helpen en een paar bijzondere gevallen van oplossing, doch geen afgeronde theorie. TAIT (An elementary Treatise on Quaternions) bewijst slechts twee eigenschappen van die vergelijking voor het geval $\Phi\rho$ zelfverwant is, en het overigens helder geschreven werkje van LAISANT »Introduction à la méthode des Quaternions" is in zijne beschouwingen van deze vergelijking op sommige punten foutief, en bovendien onvolledig.

Mijn doel is hier de volledige theorie te behandelen.

In de eerste plaats schrijven wij voor de vergelijking (1)

$$\Phi \rho = g \rho,$$

of

$$(\Phi - g) \rho = 0,$$

waarin g een zekere scalar voorstelt.

De theorie der vergelijking $\Phi \rho = \gamma$, medegedeeld in deel XIX van dit tijdschrift, kan op deze vergelijking toegepast worden. Daar nu het tweede lid der vergelijking nul is, hebben wij slechts met dat bijzondere geval te maken. Geven wij voor het geval $\gamma = 0$ in het kort de uitkomsten van dat onderzoek aan [1]). Stelt $\Phi' \rho$ de verwante functie van $\Phi \rho$ voor, dan zijn, evenals toen,

$$\left.\begin{aligned}
&\psi \, V \mu \nu = V \Phi' \mu \Phi' \nu, \\
&\chi \, V \mu \nu = V (\mu \Phi' \nu - \nu \Phi' \mu), \\
&\psi' \, V \mu \nu = V \Phi \mu \Phi \nu, \\
&\chi' \, V \mu \nu = V (\mu \Phi \nu - \nu \Phi \mu), \\
&m \, S \lambda \mu \nu = S \Phi' \lambda \Phi' \mu \Phi' \nu, \\
&m' \, S \lambda \mu \nu = S (\lambda \Phi' \mu \Phi' \nu + \mu \Phi' \nu \Phi' \lambda + \nu \Phi' \lambda \Phi' \mu), \\
&m'' \, S \lambda \mu \nu = S (\mu \nu \Phi' \lambda + \nu \lambda \Phi' \mu + \lambda \mu \Phi' \nu).
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Is nu geen der scalars m, m', m'' nul, dan is de eenige oplossing der vergelijking $\Phi \rho = 0$

$$m \rho = 0, \text{ en dus } \rho = 0.$$

Is $m = 0$, dan herleiden de operatieën Φ en Φ' alle vectoren tot twee bepaalde vlakken, terwijl de operatieën ψ en ψ' in dat geval alle vectoren terugbrengen tot twee rechte lijnen, zoodanig dat de lijn $\psi' \sigma \perp \Phi \sigma$ en $\psi \sigma \perp \Phi' \sigma$ staat. De oplossing van de vergelijking $\Phi \rho = 0$, is nu

$$\rho = \psi \sigma.$$

De waarden van m' en m'' doen nu niets ter zake. Is namelijk $m' = 0$, dan is

$$S \psi' \sigma \psi \sigma = 0,$$

want

$$S \psi' \sigma \psi \sigma = S \sigma \psi^2 \sigma = S \sigma (m' \psi \sigma - m'' \psi \Phi \sigma + \psi \Phi^2 \sigma) =$$
$$= S \sigma (m' \psi \sigma - m m'' \sigma + m \Phi \sigma),$$

en dus, omdat $m = 0$,

---

1) In deel XIX blz. 136, 9e regel van onderen staat $x \Phi_0$, men leze $x \psi_0$, en bladz. 139, 7e regel van onderen staat $\Phi \rho = 0$, men leze $\psi \rho = 0$.

$$S\psi'\sigma\psi\sigma = m' S\sigma\psi\sigma;$$

zoodat als $m' = 0$ is, $\psi'\sigma \perp \psi\sigma$ komt te staan; maar dit verandert niets aan de oplossing. Is echter de functie zelfverwant, dan vordert $m' = 0$, dat $S(\psi\sigma)^2 = 0$ is, en dus voor iederen vector $\psi\sigma = 0$.

Is in het algemeen, zelfverwant of niet, de functie Φ, en dus ook Φ', een zoodanige, dat $\psi\sigma$ en $\psi'\sigma$ voor iederen vector nul worden, dan herleiden de operatieën Φ en Φ' iederen vector tot bepaalde lijnen, die respectievelijk loodrecht staan op de vlakken, waartoe alsdan χ' en χ alle vectoren herleiden; en dan zal

$$m' S\lambda\mu\nu = S(\lambda\psi V\mu\nu + \mu\psi V\nu\lambda + \nu\psi V\lambda\mu\nu) = 0$$

zijn, en dus

$$m' = m = 0.$$

De functie Φ, die in het algemeen aan de vergelijking

$$m\rho - m'\Phi\rho + m''\Phi^2\rho - \Phi^3\rho = 0$$

voldoet, voldoet nu aan de quadratische vergelijking

$$m'\rho - m''\Phi\rho + \Phi^2\rho = 0,$$

of, omdat $m' = 0$ is,

$$m''\Phi\rho - \Phi^2\rho = 0;$$

en de oplossing der vergelijking $\Phi\rho = 0$ is nu

$$\rho = \chi\sigma,$$

zijnde dus iederen vector gelegen in een vlak $\perp \Phi'\sigma$.

Is in dit geval $m'' = 0$, dan verkrijgen wij wel nieuwe loodrechte standen van $\Phi\sigma$ en $\Phi'\sigma$ en van $\chi\sigma$ en $\chi'\sigma$, maar geen andere oplossing.

Alleen als $\Phi\rho$ steeds nul is, is natuurlijk omgekeerd ρ onbepaald.

Ten einde nu de toepassing te maken op onze vergelijking, moeten wij al, wat van $\Phi\rho$ gezegd is, nu overbrengen op $(\Phi - g)\rho$. Ter onderscheiding gebruiken wij nu kapitale letters voor de hierbij optredende hulpfunctieën en scalars.

De verwante functie is $(\Phi' - g)\rho$, want

$$S\rho(\Phi' - g)\sigma = S\rho\Phi'\sigma - gS\rho\sigma = S\sigma\Phi\rho - gS\sigma\rho = S\sigma(\Phi - g)\rho.$$

Dan is

$$\Psi V\mu\nu = V(\Phi' - g)\mu(\Phi' - g)\nu = V\Phi'\mu\Phi'\nu - gV(\mu\Phi'\nu - \nu\Phi'\mu) + g^2 V\mu\nu,$$

en dus

$$\left.\begin{aligned}
\Psi\rho &= \psi\rho - g\chi\rho + g^2\rho, \\
\Psi'\rho &= \psi'\rho - g\chi'\rho + g^2\rho, \\
X\rho &= \chi\rho - 2g\rho, \\
X'\rho &= \chi'\rho - 2g\rho, \\
M &= m - m'g + m''g^2 - g^3, \\
M' &= m' - 2m''g + 3g^2 = -\frac{dM}{dg}, \\
M'' &= m'' - 3g = \tfrac{1}{2}\frac{d^2M}{dg^2}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

De vergelijking $V\rho\,\Phi\rho = 0$ of $(\Phi - g)\rho = 0$, bevat, behalve den onbekenden vector ρ, nog den evenmin bepaalden scalar g; en dus, behalve door $\rho = 0$, wordt er aan voldaan door te nemen

$$M = 0,$$

of

$$g^3 - m''g^2 + m'g - m = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Deze derdemachts-vergelijking heeft één of drie bestaanbare wortels. Noemen we die wortels g_1, g_2 en g_3, dan splitst van nu af de vergelijking zich in het drietal

$$(\Phi - g_1)\rho_1 = 0, \quad (\Phi - g_2)\rho_2 = 0, \quad (\Phi - g_3)\rho_3 = 0;$$

en daar nu g_1, g_2 en g_3 verder bekende grootheden zijn, zijn de oplossingen

$$\left.\begin{aligned}
\rho_1 &= \Psi_1\sigma = \psi\sigma - g_1\chi\sigma + g_1^2\sigma, \\
\rho_2 &= \Psi_2\sigma = \psi\sigma - g_2\chi\sigma + g_2^2\sigma, \\
\rho_3 &= \Psi_3\sigma = \psi\sigma - g_3\chi\sigma + g_3^2\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Zij kunnen nog op andere wijze gevonden worden, want

$$\begin{aligned}
(\Phi - g_2)(\Phi - g_3)\sigma = \Phi^2\sigma - (g_2 + g_3)\sigma + g_2 g_3\sigma = \\
= m''\Phi\sigma - m'\sigma + \psi\sigma + g_1\Phi\sigma - m''\Phi\sigma + \\
+ m''\Phi\sigma + m'\sigma - m''g_1\sigma + g_1^2\sigma = \\
= \psi\sigma - g_1\chi\sigma + g_1^2\sigma,
\end{aligned}$$

en dus

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_1\sigma &= (\Phi - g_2)(\Phi - g_3)\sigma, \\
\Psi_2\sigma &= (\Phi - g_3)(\Phi - g_1)\sigma, \\
\Psi_3\sigma &= (\Phi - g_1)(\Phi - g_2)\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Uit dit drietal volgt, daar $(\Phi - g_1)\Psi_1\sigma = M_1\sigma = 0$ is,

$$(\Phi - g_1)(\Phi - g_2)(\Phi - g_3)\sigma = 0. \quad \ldots\ldots (8)$$

Uit dit alles volgt, dat in het algemeen een der operatien $\Phi - g$ een willekeurigen vector tot een bepaald vlak terugbrengt;

voegt men een tweede operatie toe, dan wordt de vector tot een lijn teruggebracht; terwijl de opeenvolging der drie operatieën iederen vector vernietigt. Bovendien snijden de vlakken $(\Phi - g_1)\sigma$, $(\Phi - g_2)\sigma$ en $(\Phi - g_3)\sigma$ elkaar volgens de lijnen $\Psi_1\sigma$, $\Psi_2\sigma$ en $\Psi_3\sigma$, en evenzoo snijden de vlakken $(\Phi' - g_1)\sigma$, $(\Phi' - g_2)\sigma$ en $(\Phi' - g_3)\sigma$ elkander volgens de lijnen $\Psi_1'\sigma$, $\Psi_2'\sigma$ en $\Psi_3'\sigma$. Het tweede stelsel is de pooldrievlakshoek van het eerste. De richtingen Ψ noemt men de hoofdrichtingen der functie Φ.

Bij onbestaanbare wortels treden imaginaire vlakken op, wier snijlijn reëel blijft.

1e Voorbeeld.

$$\Phi\rho = V\alpha\rho\beta,$$
$$\Phi'\rho = \Phi\rho,$$
$$m = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta,\quad m' = -\alpha^2\beta^2,\quad m'' = -S\alpha\beta,$$
$$\psi\rho = \beta^2\alpha S\alpha\rho + \alpha^2\beta S\beta\rho - \alpha^2\beta^2\rho,$$
$$\chi\rho = -\beta S\alpha\rho - \alpha S\beta\rho,$$
$$M = g^3 + g^2 S\alpha\beta - g\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = 0,$$
$$(g^2 - \alpha^2\beta^2)(g + S\alpha\beta) = 0,$$
$$g_1 = -S\alpha\beta,\quad g_2 = T\alpha\beta,\quad g_3 = -T\alpha\beta,$$
$$\rho_1 = V\alpha\beta S\sigma\alpha\beta,$$
$$\rho_2 = \beta(\beta\alpha + T\beta\alpha)S\alpha\sigma + \alpha(\alpha\beta + T\alpha\beta)S\beta\sigma,$$
$$\rho_3 = \beta(\beta\alpha - T\beta\alpha)S\alpha\sigma + \alpha(\alpha\beta - T\alpha\beta)S\beta\sigma.$$

2e Voorbeeld.

$$\Phi\rho = V\alpha\beta\rho,$$
$$\Phi'\rho = V\beta\alpha\rho,$$
$$\psi\rho = \alpha^2\beta^2\rho + 2\beta S\alpha\beta S\alpha\rho - \alpha^2\beta S\beta\rho - \beta^2\alpha S\alpha\rho,$$
$$\chi\rho = V\rho\alpha\beta + \rho S\alpha\beta,$$
$$m = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta,\quad m' = 2(S\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2,\quad m'' = 3S\alpha\beta,$$
$$g^3 - 3g^2 S\alpha\beta + \{2(S\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2\}g - \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = 0,$$
$$(g - S\alpha\beta)(g^2 - 2gS\alpha\beta + \alpha^2\beta^2) = 0,$$
$$g_1 = S\alpha\beta,\quad g_2 = S\alpha\beta + T\alpha\beta.\sqrt{-1},\quad g_3 = S\alpha\beta - T\alpha\beta.\sqrt{-1},$$
$$\rho_1 = (TV\alpha\beta)^2\sigma - \beta V\alpha\beta S\alpha\sigma - \alpha V\alpha\beta S\beta\sigma;$$

ρ_2 en ρ_3 zijn complexen, dus bivectoren.

Is de oorspronkelijke functie een zoodanige, dat $m = 0$ is, dan kan aan de vergelijking $\Phi\rho = 0$ voldaan worden door de langs een vaste lijn gelegen vectoren $\psi\sigma$, die echter geen nieuwe oplossingen geven aan de vergelijking $V\rho\Phi\rho = 0$;

want uit het voorgaande blijkt, dat de cubische scalarvergelijking (5) de gedaante

$$g^3 - m'' g^2 + m' g = 0$$

aanneemt, en dus alsdan een wortel $g_1 = 0$ heeft. Substitueert men dit in de vroegere formulen, dan ziet men, dat het stelsel lijnen en vlakken $\Psi\,\sigma$, $\Psi'\,\sigma$, $(\Phi - g)\,\sigma$ en $(\Phi' - g)\,\sigma$, bij dien wortel behoorende, samenvalt met het stelsel, dat bij de oorspronkelijke funtie behoort.

3e Voorbeeld.

$$\Phi\,\rho = V\,\varepsilon\,\rho,$$
$$\Phi'\,\rho = V\,\rho\,\varepsilon,$$
$$\psi\,\rho = -\,\varepsilon\,S\,\varepsilon\,\rho,\quad \chi\,\rho = -\,V\,\varepsilon\,\rho,$$
$$m = 0,\quad m' = -\,\varepsilon^2,\quad m'' = 0,$$
$$g^3 - \varepsilon^2\,g = 0,$$
$$g_1 = 0,\quad g_2 = T\varepsilon\,.\sqrt{-1},\quad g_3 = -\,T\varepsilon\,.\sqrt{-1},$$
$$\rho_1 = -\varepsilon\,S\,\varepsilon\,\sigma,\quad \rho_2 = (\varepsilon + T\varepsilon\,.\sqrt{-1})\,V\varepsilon\,\sigma,\quad \rho_3 = (\varepsilon - T\varepsilon\,.\sqrt{-1})\,V\varepsilon\,\sigma.$$

B. *Gelijke wortels.*

Heeft de cubische vergelijking gelijke wortels, bijvoorbeeld $g_3 = g_2$, dan valt het vlakken- en lijnenstelsel, dat bij den wortel g_3 behoort, samen met dat, hetwelk bij den wortel g_2 behoort, tot een dubbel stelsel.

Daar

$$M' = -\,\frac{d\,M}{d\,g} \quad \text{en} \quad 2\,M'' = \frac{d^2\,M}{d\,g^2},$$

zal, indien $g_3 = g_2$ is, en dus $M = 0$ een dubbele wortel heeft, voor dezelfde waarde van g ook $M' = 0$ worden; en dus is dan

$$M'_2 = M'_3 = 0.$$

Volgens het hierboven gezegde (zie bladz. 77) staan in dit geval $\Psi_2\,\sigma$ en $\Psi'_2\,\sigma$ loodrecht op elkander, en dus evenzoo de vlakken $\Phi - g_2$ en $\Phi' - g_2$. De drievlakshoeken gaan door samenvalling van twee zijvlakken over in tweevlakshoeken met een dubbel vlak en een dubbele ribbe. De dubbele ribbe van den eenen staat loodrecht op het dubbelvlak van den anderen, en bovendien staan de beide dubbelvlakken loodrecht op elkander. Er zijn nu maar twee hoofdrichtingen

meer, namelijk $\rho_1 = \Psi_1 \sigma$ en $\rho_2 = \Psi_2 \sigma$, waarvan de tweede als dubbele telt. De vergelijkingen (7) en (8) worden nu

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 = (\Phi - g_2)^2 \sigma, \\ \rho_2 = (\Phi - g_1)(\Phi - g_2) \sigma, \\ (\Phi - g_1)(\Phi - g_2)^2 \sigma = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Dus ook nu herleidt één operatie $\Phi - g$ iederen vector tot een vlak; twee opeenvolgende iederen vector tot eene lijn; terwijl drie opeenvolgende iederen vector vernietigen.

Heeft de vergelijking drie gelijke wortels, dan is er maar één (drievoudig) vlak $(\Phi - g)\sigma$, dat loodrecht staat op $\Psi \sigma$, en één (drievoudig) vlak $(\Phi' - g)\sigma$, dat loodrecht staat op $\Psi' \sigma$. Daar nu tegelijkertijd $M'' = 0$ is, staan beide stelsels loodrecht op elkander.

De oplossing van de vergelijking $V \rho \Phi \rho = 0$ is nu

$$\rho = \Psi \sigma = \psi \sigma - g \chi \sigma + g^2 \sigma;$$

en de vergelijkingen (7) en (8) worden

$$\rho = (\Phi - g)^2 \sigma,$$
$$(\Phi - g)^3 \sigma = 0.$$

Ook kunnen twee gelijke wortels optreden, indien van de gegeven functie $\Phi \rho = 0$, zoowel m als $m' = 0$ zijn; in welk geval het dubbele stelsel samenvalt met het stelsel van de vergelijking $\Phi \rho = 0$, terwijl de andere wortel zijn eigen afzonderlijk stelsel bezit.

Is bij de oorspronkelijke functie tevens $m'' = 0$, dan zijn alle wortels van de cubische vergelijking nul; en er is maar één richting, die aan de vergelijking $V \rho \Phi \rho = 0$ voldoet, en deze voldoet tevens aan de vergelijking $\Phi \rho = 0$. Nu zijn (7) en (8)

$$\rho = \psi \sigma = \Phi^2 \sigma,$$
$$\Phi^3 \sigma = 0;$$

zoodat nog steeds ééne operatie een willekeurigen vector tot een vlak, twee opeenvolgende den vector tot een lijn herleiden, en eerst drie opeenvolgende den vector vernietigen.

4ᵉ Voorbeeld.

$$\Phi \rho = \alpha_1 S \beta_1 \rho + \alpha_2 S \beta_2 \rho,$$
$$\Phi' \rho = \beta_1 S \alpha_1 \rho + \beta_2 S \alpha_2 \rho,$$
$$\psi \rho = - V \beta_1 \beta_2 S \alpha_1 \alpha_2 \rho,$$
$$\psi' \rho = - V \alpha_1 \alpha_2 S \beta_1 \beta_2 \rho,$$

$$\chi \rho = V(\beta_1 \, V \alpha_1 \rho + \beta_2 \, V \alpha_2 \rho),$$
$$\chi' \rho = V(\alpha_1 \, V \beta_1 \rho + \alpha_2 \, V \beta_2 \rho),$$
$$m = 0, \; m' = S \, . \, V \alpha_1 \alpha_2 \, V \beta_1 \beta_2, \; m'' = S(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2),$$
$$g^3 - m'' g^2 + m' g = 0,$$
$$g_1 = 0, \; g_{2,3} = \tfrac{1}{2}(m'' \pm \sqrt{m''^2 - 4 m'}).$$

Is nu

$$m''^2 - 4 m' = 0,$$

dan zijn

$$g_2 = g_3 = \tfrac{1}{2} S(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) = \sqrt{S \, . \, V \alpha_1 \alpha_2 \, . \, V \beta_1 \beta_2},$$
$$\rho_1 = \Psi_1 \sigma = \psi \sigma = - V \beta_1 \beta_2 \, S \alpha_1 \alpha_2 \sigma,$$
$$\rho_2 = \rho_3 = \Psi_2 \sigma = \psi \sigma - g_2 \chi \sigma + g_2{}^2 \sigma =$$
$$= \sigma S \, . \, V \alpha_1 \alpha_2 \, V \beta_1 \beta_2 - V \beta_1 \beta_2 \, S \alpha_1 \alpha_2 \sigma -$$
$$- \tfrac{1}{2} V(\beta_1 \, V \alpha_1 \sigma + \alpha_1 \, V \beta_1 \sigma) \, S(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2).$$

Als daarentegen $V \alpha_1 \alpha_2$ loodrecht staat op $V \beta_1 \beta_2$, dan is $m' = 0$, en dus

$$\rho_1 = \rho_2 = \psi \sigma = - V \beta_1 \beta_2 \, S \alpha_1 \alpha_2 \sigma,$$
$$\rho_3 = \psi \sigma - g_3 \chi \sigma + g_3{}^2 \sigma.$$

Is bovendien

$$S \alpha_1 \beta_1 = - S \alpha_2 \beta_2,$$

dan is

$$m'' = 0;$$

en de eenige oplossing is

$$\rho = \psi \sigma = - V \beta_1 \beta_2 \, S \alpha_1 \alpha_2 \sigma.$$

Gelijke wortels treden ook op, als voor een der drie wortels g van de vergelijking (5) $\Psi \sigma$ voor iederen willekeurigen vector σ nul is. Doch daar dan het karakter der oplossing anders is, zullen wij dit afzonderlyk nagaan.

C. *Een der functieën Ψ is steeds nul.*

Als voor iederen willekeurigen vector een der drie functiëen Ψ steeds nul is, dan is voor dien wortel ook $M' = 0$, en dan heeft dus de vergelijking (10) twee gelijke wortels; en zoo wij deze twee weder door g_2 en g_3 kunnen aangeven, is dus $g_3 = g_2$, en geldt alles, wat voor g_2 gevonden wordt, van zelf voor g_3. Wij hebben nu

$$\Psi_3 \sigma = \Psi_2 \sigma = 0, \; M_3' = M_2' = 0.$$

Nu herleidt de operatie $(\Phi - g_2)$ iederen vector σ tot een bepaalde lijn, en vernietigt iederen vector σ gelegen in het vlak $\perp (\Phi' - g_2)\,\sigma$. Evenzoo mutatis mutandis $\Phi' - g_2$.

De oplossingen van de vergelijking $V \rho\, \Phi\, \rho = 0$ zijn nu

$$\rho_1 = \Psi_1\, \sigma \text{ en } \rho_2 = X_2\, \sigma = \chi\, \sigma - 2\, g_2\, \sigma,$$

waarvan de eerste vectoren langs een lijn, de tweede vectoren in een zeker vlak gelegen aangeeft.

In plaats van de vergelijkingen (7) en (8) treden nu de betrekkingen

$$\Psi_1\, \sigma = (\Phi - g_2)^2\, \sigma,$$
$$(\Phi - g_1)\,(\Phi - g_2)\, \sigma = 0.$$

De symbolische cubische vergelijking

$$\Phi^3 - m''\, \Phi^2 + m'\, \Phi - m = 0,$$

welke krachtens de wortels van (5) volgt uit onze vergelijking (8), blijkt dus zich nu te herleiden tot eene tweedemachts vergelijking.

Is bovendien $M'' = 0$, dan zijn de drie wortels van (5) onderling gelijk, en aan de vergelijking $V \rho\, \Phi\, \rho = 0$ wordt alleen voldaan door te stellen

$$\rho = X\, \sigma = \chi\, \sigma - 2\, g\, \sigma.$$

Is in de oorspronkelijke functie $\Phi\, \rho$ reeds de grootheid $m = 0$, dan is de enkelvoudige wortel ook wortel van $\Phi\, \rho = 0$; zijn $m = m' = 0$, dan is de dubbele wortel ook wortel van $\Phi\, \rho = 0$. Uit (6) volgt, dat, als voor een wortel $g = 0$ ook $\Psi\, \sigma = 0$ is, dan ook $\psi\, \sigma = 0$ moet zijn. Omgekeerd, is $\psi\, \sigma = 0$, dan heeft vergelijking (5) twee gelijke wortels nul: dan is $X_2\, \rho = \chi\, \rho$, en de twee oplossingen zijn

$$\rho_1 = - g_1\, \chi\, \sigma + g_1{}^2\, \sigma, \quad \rho_2 = \chi\, \sigma.$$

Is nu ook $m'' = 0$, dan is er maar één oplossing $\rho = \chi\, \sigma$.

Herleiden de operatiën $\Phi - g$ en $\Phi' - g$ iederen vector tot nul, dan is van zelf $M'' = 0$, zijn alle wortels der vergelijking (5) onderling gelijk; en iedere willekeurige vector is de oplossing van de vergelijking $V \rho\, \Phi\, \rho = 0$. Is bovendien $m = m' = m'' = 0$, dan zijn tegelijk alle mogelijke vectoren wortels van de vergelijking $\Phi\, \rho = 0$.

5e Voorbeeld.

$$\Phi\, \rho = \alpha\, S \beta\, \rho, \quad \Phi'\, \rho = \beta\, S \alpha\, \rho,$$
$$\psi\, \rho = \psi'\, \rho = 0,$$

$$\chi \rho = V \beta \, V \alpha \rho, \quad \chi' \rho = V \alpha \, V \beta \rho,$$
$$m = m' = 0, \quad m'' = S \alpha \beta,$$
$$g_1 = S \alpha \beta, \quad g_2 = g_3 = 0,$$
$$\rho_1 = \Psi_1 \sigma = \psi \sigma - g_1 \chi \sigma + g_1{}^2 \sigma = - V\beta \, V\alpha\sigma S\alpha\beta + \sigma (S\alpha\beta)^2 = \alpha S\alpha\beta \, S\beta\sigma,$$
$$\rho_2 = \chi \sigma = - V \beta \, V \alpha \sigma.$$

Staat nu $\alpha \perp \beta$, dan is $m'' = 0$, en de eenige oplossing is
$$\rho = - V \beta \, V \alpha \sigma.$$

6ᵉ Voorbeeld.
$$\Phi \rho = a^2 \rho - c^2 \alpha \, S \alpha \rho,$$
waarin $a^2 = b^2 + c^2$, en $T \alpha = 1$. Nu is $\Phi' \rho = \Phi \rho$, en verder
$$\psi \rho = a^2 (b^2 \rho - c^2 \alpha \, S \alpha \rho), \quad \chi \rho = (a^2 + b^2) \rho - c^2 \alpha S \alpha \rho,$$
$$m = a^4 b^2, \quad m' = a^2 (a^2 + 2 b^2), \quad m'' = 2 a^2 + b^2,$$
$$g^3 - (2 a^2 + b^2) g^2 + a^2 (a^2 + 2 b^2) g - a^4 b^2 = 0,$$
$$g_1 = b^2, \quad g_2 = g_3 = a^2,$$
$$\rho_1 = a^2 (b^2 \sigma - c^2 \alpha \, S \alpha \sigma) - b^2 (a^2 + b^2) \sigma + b^2 c^2 \alpha \, S \alpha \sigma + b^4 \sigma =$$
$$= - c^4 \alpha \, S \alpha \sigma,$$
$$\Psi_2 \sigma = a^2 (b^2 \sigma - c^2 \alpha \, S \alpha \sigma) - a^2 (a^2 + b^2) \sigma + a^2 c^2 \alpha \, S \alpha \sigma + a^4 \sigma = 0,$$
$$\rho_2 = X_2 \sigma = \chi \sigma - 2 g_2 \sigma = (a^2 + b^2) \sigma - c^2 \alpha \, S \alpha \sigma - 2 a^2 \sigma =$$
$$= - c^2 (\sigma + \alpha \, S \alpha \sigma).$$

Behandeling van LAISANT. LAISANT »Introduction à la méthode des quaternions (Ed. 1882, page 141, 142) redeneert als volgt.

Zijn ρ_1, ρ_2 en ρ_3 de gevonden richtingen, die voldoen aan de vergelijking $V \rho \Phi \rho = 0$, dan is voor iederen willekeurigen vector te stellen
$$\sigma = x \rho_1 + y \rho_2 + z \rho_3,$$
en dus
$$(\Phi - g_2) \sigma = x (g_1 - g_2) \rho_1 + z (g_3 - g_2) \rho_3,$$
waaruit
$$(\Phi - g_1)(\Phi - g_2) \sigma = z (g_3 - g_1)(g_3 - g_2) \rho_3;$$
en op dezelfde wijze twee andere vergelijkingen. Daar nu σ een geheel willekeurige vector is, komt deze uitkomst met de vergelijkingen (7) overeen, zoolang de drie wortels der vergelijking (5) ongelijk zijn.

Zoodra echter gelijke wortels optreden, blijft hij uitgaan van de betrekking
$$\sigma = x \rho_1 + y \rho_2 + z \rho_3,$$
en neemt daarbij aan, dat zoowel $(\Phi - g_2) \rho_2$ als $(\Phi - g_2) \rho_3$

nul is; zoodat bij den wortel g_2 zoowel een vector ρ_2, als een daarvan in richting verschillende vector ρ_3, bij hypothese wordt aangenomen. Dit nu is alleen, zooals wij gezien hebben, geoorloofd, indien $\Psi_2\,\sigma$ voor iederen vector nul is; anders niet. Bij LAISANT komt dit niet duidelijk aan het licht, doordat hij alleen de uitdrukkingen $(\Phi - g_2)(\Phi - g_3)\,\sigma$ ter zijner beschikking heeft ter bepaling van de richtingen ρ, en niet onze betrekkingen (6), die slechts met behulp van de theorie in Deel XIX van dit Tijdschrift konden gevonden worden. Hij gaat dan voort

$$(\Phi - g_2)\,\sigma = x\,(g_1 - g_2)\,\rho_1,$$
$$(\Phi - g_1)\,\sigma = (g_2 - g_1)\,(y\,\rho_2 + z\,\rho_3);$$

wat dus alleen waar is, als $\Psi_2\,\sigma = 0$ is. Anders zijn er maar twee richtingen ρ_1 en ρ_2, en in het spoor van LAISANT voortgaande, moet dan gesteld worden

$$\sigma = x\,\rho_1 + y\,\rho_2 + z\,\tau,$$

waarin τ een willekeurige met ρ_1 en ρ_2 niet coplanaire vector is. Dan is

$$(\Phi - g_2)\,\sigma = x\,(g_1 - g_2)\,\rho_1 + k\,(\Phi - g_2)\,\tau,$$
$$(\Phi - g_1)\,\sigma = y\,(g_2 - g_1)\,\rho_2 + k\,(\Phi - g_1)\,\tau,$$
$$(\Phi - g_1)(\Phi - g_2)\,\sigma = k\,(\Phi - g_1)(\Phi - g_2)\,\tau,$$
$$(\Phi - g_2)^2\,\sigma = k\,(\Phi - g_2)^2\,\tau;$$

waaruit wel volgt, dat twee operatiëen iederen willekeurigen vector tot een bepaalde lijn herleidden, maar die lijn zelve niet bepaald kan worden; en uit deze vormen kan ook niet blijken, zooals uit onze formulen, dat in het geval van gelijke wortels drie achtereenvolgende operatiëen iederen vector vernietigen. In het voorgaande zijn alle bezwaren opgeheven.

D. *Zelfverwante functiëen.*

Is de functie $\Phi\,\rho$ zelfverwant, dan vallen alle stelsels van lijnen en vlakken der verwante functie samen met die der oorspronkelijke functie; en dus ook alle stelsels, behoorende bij $\Phi' - g$, met die, welke behooren bij de functie $\Phi - g$. De derdemachtsvergelijking ter bepaling van g heeft steeds reëele wortels, en de daarbij behoorende vectorenrichtingen Ψ_1, Ψ_2 en Ψ_3 zijn onderling loodrecht. (Zie onder anderen TAIT, Elem. Treatise on Quat. § 163, 164).

$M' = 0$. De vergelijking (5) heeft twee gelijke wortels, maar nu is ook voor deze wortels $\Psi\,\sigma = 0$, want (zie bladz. 77), M' is nu $S(\Psi\,\sigma)^2 : S\,\sigma\,\Psi\,\sigma$; en dus, zoo $M' = 0$ is, is $\Psi\,\sigma = 0$, zoodat aan de vergelijking $(\Phi - g_1)\,\rho = 0$ voldaan wordt door alle vectoren in de richting $\Psi_1\,\sigma$, en aan de vergelijking $(\Phi - g_2)\,\sigma = 0$ door alle vectoren in het vlak $X_2\,\sigma$.

Hieronder wordt het geval gerangschikt, dat in de oorspronkelijke zelfverwante functie $m = m' = 0$ is.

$M'' = 0$. Drie gelijke wortels. Alle vectoren in de ruimte voldoen aan de vergelijking $V\,\rho\,\Phi\,\rho = 0$.

Hieronder behoort het geval gerangschikt te worden, dat $m = m' = m'' = 0$ is voor de oorspronkelijke zelfverwante functie; in welk geval alle vectoren der ruimte tevens voldoen aan de vergelijking $\Phi\,\rho = 0$.

DRAAIINGS-MATRICES EN QUATERNIONS [$B\,2\,c\,\alpha$, $12\,d$]

DOOR

Dr. L. VAN ELFRINKHOF.

A. *Kritiek op de verhandelingen van den Heer* TH. B. VAN WETTUM.

In deel XIX van dit Tijdschrift, bladz. 143—150, heeft schrijver dezes een kritiek gegeven over twee in de deelen XVII en XVIII opgenomen verhandelingen van den Heer Th. B. VAN WETTUM, en daarin aangetoond, dat genoemde Heer uit zijne formulen onjuiste besluiten trekt, hoofdzakelijk voortvloeiende uit verkeerde opvatting van de betrekking $bx + cy + dz = 0$. De Heer VAN WETTUM beschouwt deze als een betrekking tusschen b, c en d, terwijl zij inderdaad een voorwaarde uitdrukt, waaraan de coördinaten van het uiteinde eens vectors voldoen moeten, opdat de matrix van coördinaten-vervorming

$$q(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos p & -\nu \sin p & \mu \sin p \\ \nu \sin p & \cos p & -\lambda \sin p \\ -\mu \sin p & \lambda \sin p & \cos p \end{vmatrix}, \quad (1)$$

op dien vector toegepast, de uitwerking hebbe van een draaiing van een vector in een bepaald vlak, welks normaal λ, μ, ν tot richtings-cosinussen heeft. Voldoen de coördinaten x, y, z niet aan de betrekking $bx + cy + dz = 0$, dan stelt ook de operatie $q(a, b, c, d)$, op dien vector toegepast, niet meer een draaiing voor, doch er ontstaat een andere vector.

De operator $q(a, b, c, d)$ was ontstaan door vereenvoudiging der matrix voor conische draaiing

$$Q(a,b,c,d) = \left|\begin{array}{lll} \frac{b^2}{1+a}+a, & \frac{bc}{1+a}-d, & \frac{bd}{1+a}+c, \\ \frac{bc}{1+a}+d, & \frac{c^2}{1+a}+a, & \frac{cd}{1+a}-b, \\ \frac{bd}{1+a}-c, & \frac{cd}{1+a}+b, & \frac{d^2}{1+a}+a, \end{array}\right| \quad . . (2)$$

(door den Heer VAN WETTUM quaternion-matrix genoemd, hoewel zij in beteekenis niet met het HAMILTON'sche quaternion overeenstemt), en wel voor het geval, dat het voorwerp der operatie, de vector (x, y, z), voldeed aan de voorwaarde

$$bx + cy + dz = 0.$$

Thans heeft de Heer VAN WETTUM zijn onderzoek voortgezet en opgenomen op de eerste bladzijden van deel XX van dit Tijdschrift. Ook thans weder wordt uit de formulen een verkeerd besluit getrokken, voortkomende uit de reeds in deel XIX door mij aangetoonde verwarring tusschen operatoren voor conische draaiing en quaternions, die, afgeleid zijnde uit een vlakke draaiing, op niet in hun vlak gelegen vectoren een geheel bijzondere werking uitoefenen, waarbij evenwel een vector geen vector blijft.

Wij hebben alzoo thans drie operatoren $q(a, b, c, d)$, $Q(a, b, c, d)$ en het HAMILTON'sche quaternion. Op vectoren loodrecht op hun as toegepast, zijn de uitkomsten gelijk; op vectoren, die een scheeven hoek met hun as maken, is de uitwerking van alle drie verschillend. De eerste verandert zulk een vector in een anderen, die niet even lang is en er op ingewikkelde wijze van afhangt; de tweede doet den vector een kegelvlak beschrijven; de derde maakt van den vector (als rechthoekig quaternion beschouwd) een scheefhoekig quaternion. De Heer VAN WETTUM houdt dit verschil niet in het oog; vandaar dat zijne uitkomsten van die van HAMILTON afwijken.

In 's Heeren VAN WETTUM's verhandeling in deel XX komt die verwarring zeer duidelijk aan het licht; want in § 4, bladz. 3 geeft de Heer VAN WETTUM den naam i aan de matrix, die hij verkrijgt door in de algemeene matrix

$Q(a, b, c, d)$ $a=0$, $b=1$, $c=0$, $d=0$ te stellen; alzoo stelt hij

$$i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

wat overeenkomt met de vergelijkingen tusschen coördinaten

$$x' = x, \quad y' = -z, \quad z' = y;$$

waaruit blijkt, dat het uiteinde van den vector (x, y, z) een cirkelboog van 90° heeft beschreven in een vlak loodrecht op de x-as, dat op een afstand x van den oorsprong verwijderd is. De vector zelve heeft dus een conische draaiing ondergaan. Hetzelfde geldt voor de j en k van den Heer VAN WETTUM ten opzichte van de y- en z-as. Deze i, j en k zijn dus geheel andere dan die van HAMILTON, wiens i alleen vectoren, welke in het YZ-vlak gelegen zijn, kan wentelen, zooals diens j en k alleen vectoren kunnen wentelen, welke respectievelijk in het YZ- en XY-vlak gelegen zijn. Waar dus de beschouwde grootheden zelve in het algemeen niet met HAMILTON overeenkomen, is het geen wonder, dat er verschillende uitkomsten ontstaan. Dat dus de Heer VAN WETTUM voor produkten als ij, jk en zoo voort, ook andere uitdrukkingen vindt, zou niet verwonderlijk zijn, ware het niet, dat de Heer van WETTUM, door onvolledige interpretatie van zijn formulen schijnbaar nog grooter afwijkingen doet ontstaan, dan noodig is. Zoo kunnen de uitkomsten in § 6 (deel XX), die geheel van HAMILTON afwijken, zeer goed met dien geleerde in overeenstemming gebracht worden. Dit blijkt uit het volgende.

De vermenigvuldiging van matrices gaat volgens den regel

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1a_1+\beta_1a_2+\gamma_1a_3 & \alpha_1b_1+\beta_1b_2+\gamma_1b_3 & \alpha_1c_1+\beta_1c_2+\gamma_1c_3 \\ \alpha_2a_1+\beta_2a_2+\gamma_2a_3 & \alpha_2b_1+\beta_2b_2+\gamma_2b_3 & \alpha_2c_1+\beta_1c_2+\gamma_2c_3 \\ \alpha_3a_1+\beta_3\alpha_2+\gamma_3a_3 & \alpha_3b_1+\beta_3b_2+\gamma_3b_3 & \alpha_3c_1+\beta_3c_2+\gamma_3c_3 \end{vmatrix}; \quad (3)$$

en zoo vindt de Heer VAN WETTUM voor jk

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

zoodat deze operatiëen den vector $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ bren-

gen tot den vector $x=\gamma$, $y=\alpha$, $z=\beta$. Nu kan omgekeerd uit den begin- en den eindstand van den vector de draaiings-operator niet ondubbelzinnig bepaald worden, aangezien de twee vectoren op oneindig veel kegels (inclusieve, een plat vlak) gelegen zijn, wier assen alle gelegen zijn in een plat vlak, dat den hoek der beide vectoren middendoordeelt en loodrecht op hun vlak staat. Dit heb ik stelkundig aangetoond op bladz. 147 en 148 (Nieuw Archief, deel XIX). Men kan een vlakke draaiing krijgen door de draaiingsas loodrecht op beide vectoren te plaatsen. Wanneer dan de Heer VAN WETTUM de produktmatrix $j\,k = Q\,(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2})$ stelt, is dit eene uit oneindig vele. Stellen wij namelijk in de formulen op bladz. 149 deel XIX, $\eta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\xi=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, $\zeta=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\delta x=\gamma-\alpha$, $\delta y=\alpha-\beta$, $\delta z=\beta-\gamma$, en zoo voort, dan kunnen wij de elementen van de matrix berekenen, maar hebben dan de vrijheid om de grootheid s (die afhangt van den hoek, welken de vector gedurende de beweging met de draaiingsas maakt) naar willekeur te kiezen.

Nemen wij als aanvangsvector den vector $(0, \beta, 0)$, dan staat deze loodrecht op de as van k, en, na toepassing van die draaiing, loodrecht op de as van j, en komen dus in dat geval de VAN WETTUM'sche j en k overeen met die van HAMILTON; dan is de uitkomst ook

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} (0, \beta, 0) = (0, 0, \beta).$$

Trachten wij nu de elementen in dit eenvoudige geval te bepalen, dan krijgen wij nu $\xi=0$, $\eta=\frac{1}{2}\beta$, $\zeta=\frac{1}{2}\beta$, $\delta x=0$, $\delta y=-\beta$, $\delta z=\beta$, en worden de vergelijkingen (4) van bladz. 147 (deel XIX)

$$2\,s\,\lambda-\mu\,\beta-\nu\,\beta=0,$$

$$\lambda\,\beta+2\,s\,\mu-\beta\,tg\frac{p}{2}=0,$$

$$\lambda\,\beta+2\,s\,\mu-\beta\,tg\frac{p}{2}=0,$$

$$-\beta\,\mu+\beta\,\nu=0;$$

waaruit na oplossing volgt

$$tg\,\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{\beta^2+2\,s^2}}{\beta},\quad \lambda=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+2\,s^2}},\quad \mu=\nu=\frac{s}{\sqrt{\beta^2+2\,s^2}},$$

waarin s een willekeurige waarde heeft. Stelt men $s=\beta$, dan komt er

$$p=120^\circ,\quad \lambda=\mu=\nu=\tfrac{1}{3}\sqrt{3},$$

en dit is het geval, dat de heer VAN WETTUM in § 6 van zijn verhandeling als eenige uitkomst aanziet.

Stelt men $s=0$, dan verkrijgt men de vlakke draaiing, en worden

$$p=90^\circ,\quad \lambda=1,\quad \mu=\nu=0,$$

of volgens de schrijfwijze met a, b, c en d, $a=0$, $b=1$, $c=d=0$. Maar dit geeft een draaiing van 90° in het YZ-vlak aan; dus al is volgens den heer VAN WETTUM $j\,k$ niet gelijk i, toch geven $j\,k$ of i op den zelfden vector toegepast nu ook dezelfde uitkomst, tevens met HAMILTON in overeenstemming. Dus voor zulke vectoren als $(0, \beta, 0)$ is

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Op bladz. 183, deel XVIII, § 23, neemt de heer VAN WETTUM andere i, j en k aan als in deel XX. Dit onderscheid wordt niet opgehelderd. Vermenigvuldigt men deze, dan wordt

$$j\,k=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

en is

$$i=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Met deze i, j en k wordt nu

$$j\,k\,(0,\ \beta,\ 0)=(0,\ 0,\ \beta),$$
$$i\,(0,\ \beta,\ 0)=(0,\ 0,\ \beta),$$

juist als boven.

Ten opzichte van den vector $(0, \beta, 0)$ hebben we dus

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$=$ HAMILTON'sche quaternion i . . . . (4)

In deze vormen is alleen de onderste rij van elementen dezelfde; en deze is juist diegene, welke de waarde van de z-coördinaat in de uitkomst der operatie op $(0, \beta, 0)$ bepaalt. Kiest men een anderen vector, dan verschillen alle uitkomsten.

Hoe laat zich dit alles verklaren?

Keeren we terug tot de oorspronkelijke matrix, door mij afgeleid door draaiing van een vector, door den heer VAN WETTUM door draaiing van coördinaten-stelsels, doch overeenstemmend in de gedaante (2), dan is dit een uitdrukking ontleend aan de vergelijkingen

$$x' = \left(\frac{b^2}{1+a} + a\right) x + \left(\frac{b\,c}{1+a} - d\right) y + \left(\frac{b\,d}{1+a} + c\right) z,$$

enz., of, zoo wij $b\,x + c\,y + d\,z = t\,(1+a)$ stellen,

$$\left.\begin{aligned} x' &= b\,t + a\,x - d\,y + c\,z, \\ y' &= c\,t + d\,x + a\,y - b\,z, \\ z' &= d\,t - c\,x + b\,y + a\,z. \end{aligned}\right\} \text{[1]} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Indien nu de vector, waarop geopereerd wordt, loodrecht staat op de as van de matrix, is $t = 0$; en dus vallen de

---

1 Uit deze gedaante der vergelijkingen laten zich gemakkelijk vormen berekenen, die a, b, c, en d geven in functie van x, y, z, x', y', z'. Eliminatie van b en c, van a en c en van a en b geeft achtereenvolgens

$$t\,(x\,y' - x'\,y + z'\,t) + (x\,x' + y\,y' + z\,z')\,z = (a\,z + d\,t)\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2),$$
$$t\,(z\,x' - z'\,x + y'\,t) + (x\,x' + y\,y' + z\,z')\,y = (a\,y + c\,t)\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2),$$
$$t\,(y\,z' - y'\,z + x'\,t) + (x\,x' + y\,y + z\,z')\,x + (a\,x + b\,t)\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Vermenigvuldigen wij de eerste met z, de tweede met y, de derde met x en tellen op, dan komt er

$$a\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = x\,x' + y\,y' + z\,z' - t^2;$$

en door substitutie in de drie vorige vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} b\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) &= y\,z' - z\,y' + (x + x')\,t, \\ c\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) &= z\,x' - x\,z' + (y + y')\,t, \\ d\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) &= x\,y' - y\,x' + (z + z')\,t. \end{aligned}\right\} (\alpha).$$

Ten einde nu t te bepalen, maken wij gebruik van de voorwaarde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Door de vier vergelijkingen (α) hiermede te verbinden verkrijgen wij, na verheffing in het vierkant, optelling en verdere herleiding,

$$(x^2 + y \;\; + z^2 + t^2)\,(x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2) = 0,$$

waaruit volgt: òf t is onbestaanbaar, dus onmogelijkheid; òf $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, en dan blijft t onbepaald. Men kan dus in de vergelijkingen (α) voor t iedere willekeurige waarde kiezen en daarna a, b, c en d berekenen. De gevolgtrekkingen van bladz. 91 en 92 (zie hierboven) laten zich ook uit deze vormen licht opmaken. Men substitueere namelijk direct $x' = y' = 0$, $x = z = 0$, $z' = y = \beta$. De Heer VAN WETTUM stelt dan $t = \beta$, HAMILTON $t = 0$.

termen $b\,t$, $c\,t$ en $d\,t$ uit, en wordt de vereenvoudigde matrix, welke wij evenals bij determinanten scheef-symmetrisch zullen noemen,

$$\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & b \\ -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Maar tevens blijkt, dat, zoodra de vector, waarop geopereerd wordt, voldoet aan de voorwaarde $b\,x + c\,y + d\,z = 0$, de eenvoudige matrix uit de algemeene gevonden wordt, door in iedere rij eenige malen de termen van een afzonderlijke rij $|\, b \;\; c \;\; a \,|$ van de overeenkomstige termen der rij af te trekken. Deze rij zullen wij de nul-rij der matrix noemen. Omgekeerd mag men dus, zoodra de matrix wordt toegepast op vectoren, die aan de voorwaarde $b\,x + c\,y + d\,z = 0$ voldoen, bij de rijen van den vereenvoudigden matrix, zoowel als bij die van de algemeene, de termen van de rij $|\, n\,b$, $n\,c$, $n\,d \,|$ optellen, wat ook n zij. Vermenigvuldigen wij nu twee zulke vormen, dan wordt het produkt

$$\begin{vmatrix} a_2 & -d_2 & c_2 \\ d_2 & a_2 & -b_2 \\ -c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & -d_1 & c_1 \\ d_1 & a_1 & -b_1 \\ -c_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2a_1 - d_2d_1 - c_2c_1 & -a_2d_1 - d_2a_1 + c_2b_1 & a_2c_1 + d_2b_2 + c_2a_1 \\ d_2a_1 + a_2d_1 + b_2c_1 & -d_2d_1 + a_2a_1 - b_2b_1 & d_2c_1 - a_2b_1 + b_2a_1 \\ c_2a_1 - b_2d_1 + a_2c_1 & + c_2d_1 + b_2a_1 + a_2b_1 & -c_2c_1 - b_2b_1 - a_2a_1 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

De eerste matrix heeft de nul-rij $|\, b_1, \; c_1, \; d_1 \,|$ dat wil zeggen om een wenteling (die dan steeds in een plat vlak plaats heeft) voor te stellen, moet de vector, die gewenteld wordt, voldoen aan de betrekking $b\,x + c\,y + d\,z = 0$. De nul-rij van de eerste matrix is dus ook nul-rij van het produkt. Maar het produkt heeft nog een tweede nul-rij. De operatie met de eerste matrix geeft een nieuwe $x = a_1\,x -$ $- d_1\,y + c_1\,z$, een nieuwe $y = d_1\,x + a_1\,y - b_1\,z$, een nieuwe $z = -c_1\,x + b_1\,y + a_1\,z$; zoodat de tweede matrix een nul-rij geeft, voortkomende uit de betrekking

$$b_2(a_1x - d_1y + c_1z) + c_2(d_1x + a_1y - b_1z) + d_2(-c_1x + b_1y + a_1z) = 0.$$

De nul-rij is dus

$$|\, b_2a_1 + c_2d_1 - d_2c_1, \;\; -b_2d_1 + c_2a_1 + d_2b_1, \;\; b_2c_1 - c_2b_1 + d_2a_1 \,|. \quad (7)$$

Substitueert men nu $a=0$, $b=1$, $c=0$, $d=0$, dan wordt de algemeene matrix (2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ met de nul-rij } | 1,0,0 | .$$

Trekt men nu van de eerste rij van dezen matrix de nul-rij af, dan zien wij, dat de tweede en vierde vorm van (4) aan elkander gelijk zijn. De eerste en derde vorm van (4) zijn vormen van het product jk, en hebben alzoo twee nul-rijen; namelijk die van k, zijnde $| 0, 0, 1 |$, en die, welke uit (7) volgt, namelijk $| 1, 0, 0 |$. Trekt men deze laatste van de tweede rij in den eersten vorm van (4) af, dan wordt deze gelijk aan den derden vorm. Trekt men echter de eerste nul-rij van de tweede rij van den derden vorm af, dan ontstaat de tweede vorm, zoodat hiermede de gelijkheid der operatoren voor den vector 0, β, 0 aangetoond is.

Vindt dus de heer VAN WETTUM voor ij, jk en ki (deel XX, bladz. 4) denzelfden vorm, dan moet bedacht worden, dat voor ij de nul-rijen zijn $| 0, 0, 1 |$ en $| 0, 1, 0 |$, voor jk $| 1, 0, 0 |$ en $| 0, 0, 1 |$ voor ki $| 0, 1, 0 |$ en $| 1, 0, 0 |$, zoodat ij, jk en ki, hoewel in denzelfden vorm te brengen, toch niet gelijk zijn. Ja, onze beschouwingen leeren ons, dat, mits toegepast op vectoren loodrecht op de assen, de matrices van den heer VAN WETTUM voldoen aan de HAMILTON'sche betrekkingen $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$, waarmede zij in die omstandigheden overeenstemmen.

Alzoo blijkt, dat ter juiste beschouwing van de matrices, hun nul-rijen van veel beteekenis zijn, en dat ter vergelijking van matrices en quaternions deze noodzakelijk moeten medegerekend worden. De formulen verkrijgen hierdoor iets gebrekkigs, omdat niet alle eigenschappen in het symbool zelve uitgedrukt worden. Bovendien geven de vereenvoudigde matrices, — die door hun fraaien symmetrischen vorm gemakkelijk te behandelen zijn — indien aan de voorwaarden, door de nul-rijen uitgedrukt, niet voldaan is, geen draaiing meer, hoewel toch als uitkomst een nieuwe vector optreedt.

Is wel aan de voorwaarden der nul-rijen voldaan, dan blijkt uit (6), dat de samenstelling (vermenigvuldiging) van

twee zulke vormen, een nieuwen geeft, die niet scheef-symmetrisch is, maar in het uiterlijk der algemeene matrices voor conische draaiing terugvalt. Dit geeft echter geen fraaien vorm aan de vergelijkingen.

Behalve deze bezwaren hebben alle matrices het groote bezwaar, dat zij uit aanvangs- en eindvector niet volkomen bepaald zijn, en dus de door den regel van vermenigvuldiging gevormde product-matrix niet de eenige is, die als resultante van de afzonderlijke factoren beschouwd kan worden.

Het is schrijver dezes gelukt naar aanleiding dezer beschouwingen een matrix van de vierde orde op te stellen, die deze gebreken niet bezit, en op eenvoudige wijze de leer der HAMILTON'sche quaternions in allen deele bevestigt.

B. *De quaternion-matrix van de vierde orde.*

Zal een quaternion-matrix kunnen worden opgesteld, dan moet zij

1°. voor een vector, die aan de voorwaarde $bx+cy+dz=0$ voldoet, dezelfde uitwerking hebben als de vorige matrices in dit geval,

2°. voor andere vectoren een uitkomst hebben, die niet met een vector overeenkomt,

3°. moeten de achtereenvolgende operatiën met twee zulke matrices door éène matrix van dezelfde gedaante kunnen vervangen worden.

Keeren wij terug tot onze vergelijking (6), dan zien wij, dat de nul-rij van de matrix (a_1, b_1, c_1, d_1) de gedaante $| b_1, c_1, d_1 |$ heeft. Vermenigvuldigen wij deze met $-b_2$, en voegen die bij de eerste rij, met $-c_2$, en voegen die bij de tweede rij, met $-d_2$ en voegen die bij de derde rij; dan verkrijgt het produkt de gedaante

$$\begin{vmatrix} a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1 & -(a_2 d_1 + d_2 a_1 + b_2 c_1 - c_2 b_1) & a_2 c_1 + c_2 a_1 - b_2 d_1 + d_2 b_1 \\ a_2 d_1 + d_2 a_1 + b_2 c_1 - c_2 b_1 & a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1 & -(a_2 b_1 + b_2 a_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1) \\ -(a_2 c_1 + c_2 a_1 - b_2 d_1 + d_2 b_1) & a_2 b_1 + b_2 a_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1 & a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1 \end{vmatrix}.$$

Dit zijn vormen, die uit vier producten ieder bestaan, en

dus eenvoudiger konden ontstaan zijn uit vermenigvuldiging van matrices van de vierde orde.

Bovendien ligt het voor de hand, om bij de drie vergelijkingen, die (x', y', z') bepalen, nog een vierde vergelijking $bx + cy + dz = 0$ te voegen. Heeft men echter vier vergelijkingen, dan is de operator, die er uit opgemaakt kan worden, meer geschikt om op een door vier elementen bepaalde grootheid te werken, dan op eene door drie elementen bepaalde zooals de vector (x, y, z). Aan dit bezwaar kan tegemoetgekomen worden, doordat men zich een nieuw symbool (w, x, y, z) kan denken, dat, indien $w = 0$ is, de coördinaten van het uiteinde van zekeren vector bepaalt. Deze overwegingen leiden er ons toe de vergelijkingen als volgt op te stellen.

$$\left.\begin{aligned} w' &= aw - bx - cy - dz, \\ x' &= bw + ax - dy + cz, \\ y' &= cw + dx + ay - bz, \\ z' &= dw - cx + by + az. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

De drie laatsten komen nu weer meer in gedaante met (5) overeen. Is nu $w = 0$, dus heeft men met een vector te doen, dan vallen de termen aw, bw, cw en dw weg, doch wij krijgen een uitkomst (w', x', y', z'), die, wat het ook moge zijn, geen vector is. Alleen, als bovendien $bx + cy + dz = 0$ is, wordt ook $w' = 0$, en komt de uitkomst volkomen overeen met die van de draaiing van een vector, die loodrecht staat op een as (b, c, d), om dien as over een hoek, welks cosinus a is. Aan de beide eerste hierboven gestelde voorwaarden is zoodoende voldaan. Wij schrijven dus in het algemeen

$$(w', x', y', z) = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} (w, x, y, z) \ldots (9)$$

waarbij even als vroeger $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ is.

Het produkt van twee dezer vormen geeft

$$\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & -d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ c_2 & d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & -c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 \\ b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 \\ d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{vmatrix}, \ (10a)$$

waarin ter verkorting

$$\left.\begin{array}{l} A = a_2\,a_1 - (b_2\,b_1 + c_2\,c_1 + d_2\,d_1), \\ B = a_2\,b_1 + b_2\,a_1 + c_2\,d_1 - d_2\,c_1, \\ C = a_2\,c_1 + c_2\,a_1 + d_2\,b_1 - b_2\,d_1, \\ D = a_2\,d_1 + d_2\,a_1 + b_2\,c_1 - c_2\,b_1, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10b)$$

Dus ook aan de derde voorwaarde, die wij gesteld hebben, is voldaan.

Stellen wij weder evenals vroeger (deel XIX, bladz. 148) $a = \cos p$, $b = \lambda \sin p$, $c = \mu \sin p$, $d = \nu \sin p$, (waarin p de hoek van draaiing en λ, μ, ν de richtingscosinussen van de as van draaiing voorstellen) dan zien wij, dat de bepalingsvergelijking van A wordt

$$\cos P = \cos p_2 \,.\, \cos p_1 - (\lambda_2\,\lambda_1 + \mu_2\,\mu_1 + \nu_2\,\nu_1) \sin p_2 \,.\, \sin p_1,$$

of, als men draaiingen door bogen van groote cirkels op een bol aangeeft,

$$\cos P = \cos p_2 \,.\, \cos p_1 - \sin p_2 \,.\, \sin p_1 \,.\, \cos \Phi,$$

waarin Φ de hoek is, dien de twee bogen p_2 en p_1 naar den zelfden kant gerekend met elkander maken, en dus P de derde zijde is van een boldriehoek, waarvan p_2 en p_1 zijden en $180° - \Phi$ de ingesloten hoek is. Zoo kunnen ook uit B, C en D formulen van bolvormige driehoeksmeting afgeleid worden.

Verwisselt men de factoren, dan verandert de uitkomst. Men behoeft om dit te zien in (10) slechts de indices om te ruilen. De vermenigvuldiging is alzoo niet commutatief, tenzij $c_2\,d_1 - d_2\,c_1 = 0$, $d_2\,b_1 - b_2\,d_1 = 0$, $b_2\,c_1 - c_2\,b_1 = 0$, of wel wanneer

$$b_2 : b_1 = c_2 : c_1 = d_2 : d_1,$$

dat wil zeggen wanneer de matrices in hetzelfde vlak of in evenwijdige vlakken werken.

Een draaiing van 90° wordt voorgesteld door den term $a = 0$ te stellen. Een draaiing om de X-as door $c = d = 0$ te stellen, dus

$$\left|\begin{array}{cccc} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{array}\right|,$$

Stellen wij evenals HAMILTON draaiingen van 90° om de assen door i, j en k voor, dan zijn

$$i=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},\ j=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},\ k=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Door vermenigvuldiging

$$jk=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=i,$$

en zoo voort.

Verheft men in het vierkant, dan wordt

$$i^2=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1,$$

evenzoo $j^2=-1$ en $k^2=-1$.

Bovendien zien wij door splitsing

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+c\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}+d\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=a+bi+cj+dk.$$

Is (x, y, z) een vector, dan stelt

$$\begin{vmatrix} 0 & -x & -y & -z \\ x & 0 & -z & y \\ y & z & 0 & -z \\ z & -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

een rechthoekige matrix voor, welker as de vector (x, y, z) is. Dan vinden wij

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -x & -y & -z \\ x & 0 & -z & y \\ y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w' & -x' & -y' & -z' \\ x' & w' & -z' & y' \\ y' & z' & w' & -x' \\ z' & -y' & x' & w' \end{vmatrix},$$

waarin

$$\begin{aligned} w' &= -bx - cy - dz, \\ x' &= ax - dy + cz, \\ y' &= dx + ay - bz, \\ z' &= -cx + by + az. \end{aligned}$$

en dus, zoodra $bx + cy + dz = 0$ is, is ook $w' = 0$; en is dus de uitkomst die rechthoekige matrix, welker as juist die vector (x', y', z') is, die ontstaat, als men dezelfde matrix (a, b, c, d) op den vector (x, y, z) toepast. Daarom kunnen wij met Hamilton een vector gelijk stellen aan de matrix, welke dien vector tot as heeft.

Hetzelfde kunnen wij op het meer algemeene symbool (w, x, y, z) toepassen, en zoo verkrijgt dit nieuwe symbool zelve de beteekenis van zulk een matrix van de vierde orde; en wordt dus, om de terminologie van Hamilton in te voeren, quaternion = scalar + vector.

Hiermede zijn de grondvergelijkingen van de theorie der quaternions afgeleid uit de beschouwing van matrices van de vierde orde. Het verdere wordt door toepassing van de hier bewezen eigenschappen gevonden.

Alzoo blijkt dat de hier opgestelde matrices de theorie der quaternions volkomen bevestigen.

OPLOSSING VAN DE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKING VAN JACOBI, [$H\,2\,c\,\beta$ *ref.* $H\,8\,f$]

DOOR

K. BES.

De differentiaal-vergelijking van JACOBI wordt gewoonlijk op de volgende wijze voorgesteld.

$$L\,(x\,d\,y - y\,d\,x) - M\,d\,y + N\,d\,x = 0,$$

waarbij L, M en N linieaire functien der veranderlijken x en y voorstellen, namelijk

$$\begin{aligned} M &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}, \\ N &= a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}, \\ L &= a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}. \end{aligned}$$

Men kan haar ook schrijven in den vorm

$$\frac{d\,x}{M - x\,L} = \frac{d\,y}{N - y\,L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Stelt men beide leden dezer vergelijking door $d\,t$ voor, waar t eene nieuwe veranderlijke is, en voert men nog eene veranderlijke z in, gebonden door de betrekking

$$\frac{d\,z}{z} = -\,L\,d\,t,$$

dan verkrijgt men uit de vergelijking (1) het volgende stelsel gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,x}{d\,t} + x\,L - M &= 0, \\ \frac{d\,y}{d\,t} + y\,L - N &= 0, \\ \frac{d\,z}{d\,t} + z\,L \qquad &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Elimineert men uit deze vergelijkingen de ingevoerde veranderlijken z en t, dan verkrijgt men weder de vergelijking (1) van JACOBI.

Het stelsel gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen (2) kan geintegreerd worden door de methode van D'ALEMBERT.

Daartoe vermenigvuldigt men de eerste vergelijking met $-\alpha$, de tweede met $-\beta$, en telt ze daarna bij de derde op, waardoor men verkrijgt

$$\frac{dz}{dt} - \alpha\frac{dx}{dt} - \beta\frac{dy}{dt} + \alpha M + \beta N + (z - \alpha x - \beta y) L = 0. \quad (3)$$

Stelt men nu $z = \alpha x + \beta y + j$, en dus

$$\frac{dz}{dt} - \alpha\frac{dx}{dt} - \beta\frac{dy}{dt} = x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\beta}{dt} + \frac{dj}{dt},$$

dan gaat de vergelijking (3) over in

$$x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\beta}{dt} + \frac{dj}{dt} + \alpha M + \beta N + j L = 0 \; . \; . \; . \quad (4)$$

De ingevoerde grootheden α, β en j zijn nu voorloopig onbepaalde functien van t, terwijl t als onafhankelijk veranderlijke optreedt.

Krachtens de waarden van M, N, L kan men voor de vergelijking (4) ook schrijven

$$x\left(\frac{d\alpha}{dt} + a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}j\right) + y\left(\frac{d\beta}{dt} + a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}j\right) +$$
$$+ \frac{dj}{dt} + a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}j = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Ter bepaling van α, β en j stelt men nu de coëfficienten der vergelijking (5) gelijk nul, waardoor aan deze vergelijking identiek voldaan wordt; en verkrijgt daardoor het stelsel gelijktijdige lineaire differentiaal-vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}j = 0, \\ \frac{d\beta}{dt} + a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}j = 0, \\ \frac{dj}{dt} + a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}j = 0. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Deze lineaire vergelijkingen (6) kan men integreeren door de bekende substitutie-methode.

Stelt men namelijk

$$\alpha = k_1\, e^{-\rho t},\quad \beta = k_2\, e^{-\rho t},\quad j = k_3\, e^{-\rho t},$$

waarbij k_1, k_2, k_3 en ρ constanten zijn, zoo vindt men, na deeling door $e^{-\rho t}$, het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\rho)\,k_1 + a_{21}\,k_2 + a_{31}\,k_3 &= 0, \\ a_{12}\,k_1 + (a_{22}-\rho)\,k_2 + a_{32}\,k_3 &= 0, \\ a_{13}\,k_1 + a_{23}\,k_2 + (a_{33}-\rho)\,k_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; (7)$$

Door eliminatie der k's volgt hieruit ter bepaling van ρ, de vergelijking van den derden graad.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho, & a_{21}, & a_{31}, \\ a_{12}, & a_{22}-\rho, & a_{32}, \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}-\rho. \end{vmatrix} = 0 \;.\;.\;.\;.\; (8)$$

Men noemt nu de wortels dezer vergelijking en de bij die wortels behoorende k's achtereenvolgens

$$\begin{aligned} &\rho_1,\ k_{11},\ k_{12},\ k_{13}; \\ &\rho_2,\ k_{21},\ k_{22},\ k_{23}; \\ &\rho_3,\ k_{31},\ k_{32},\ k_{33}. \end{aligned}$$

Uit de vergelijkingen (7) kan men de onderlinge verhoudingen der k's bepalen, hetgeen voor ons doel blijkbaar voldoende is.

Van de vergelijkingen (6) worden nu drie stelsels bijzondere integralen bekend, namelijk

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= k_{11}\, e^{-\rho_1 t}, & \beta_1 &= k_{12}\, e^{-\rho_1 t}, & j_1 &= k_{13}\, e^{-\rho_1 t}; \\ \alpha_2 &= k_{21}\, e^{-\rho_2 t}, & \beta_2 &= k_{22}\, e^{-\rho_2 t}, & j_2 &= k_{23}\, e^{-\rho_2 t}; \\ \alpha_3 &= k_{31}\, e^{-\rho_3 t}, & \beta_2 &= k_{32}\, e^{-\rho_3 t}, & j_3 &= k_{33}\, e^{-\rho_3 t}. \end{aligned}$$

De algemeene integralen van de vergelijkingen (6) zijn dus:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= C_1\, k_{11}\, e^{-\rho_1 t} + C_2\, k_{21}\, e^{-\rho_2 t} + C_3\, k_{31}\, e^{-\rho_3 t}, \\ \beta &= C_1\, k_{12}\, e^{-\rho_1 t} + C_2\, k_{22}\, e^{-\rho_2 t} + C_3\, k_{32}\, e^{-\rho_3 t}, \\ j &= C_1\, k_{13}\, e^{-\rho_1 t} + C_2\, k_{23}\, e^{-\rho_2 t} + C_3\, k_{33}\, e^{-\rho_3 t}; \end{aligned}\right\} \;.\;.\; (9)$$

waarbij C_1, C_2, C_3 de willekeurige standvastigen zijn.

Tot de vergelijkingen (2) terugkeerende, vindt men door substitutie der waarden van α, β en j uit de vergelijkingen (9) in de waarde van $z = \alpha x + \beta y + j$,

$$z = C_1\,(k_{11}\, x + k_{12}\, y + k_{13})\, e^{-\rho_1 t} + C_2\,(k_{21}\, x + k_{22}\, y + k_{23})\, e^{-\rho_2 t} + \\ + C_3\,(k_{31}\, x + k_{32}\, y + k_{33})\, e^{-\rho_3 t} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (10)$$

Uit deze vergelijking vindt men, door telkens twee der willekeurige standvastigen gelijk nul te stellen, de volgende drie integralen van de vergelijkingen (2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{z\,e^{\rho_1 t}}{k_{11}\,x + k_{12}\,y + k_{13}} &= C_1, \\ \frac{z\,e^{\rho_2 t}}{k_{21}\,x + k_{22}\,y + k_{23}} &= C_2, \\ \frac{z\,e^{\rho_3 t}}{k_{31}\,x + k_{32}\,y + k_{33}} &= C_3. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

Hiermede is het stelsel vergelijkingen (2) volkomen geïntegreerd, daar uit de drie integralen (11) elke andere integraal van dit stelsel vergelijkingen kan worden afgeleid.

Men komt nu terug tot de vergelijking (1) van Jacobi.

Evenals deze door eliminatie van z en t uit het stelsel vergelijkingen (2) ontstaat, evenzoo ontstaat de integraal van de vergelijking (1) door eliminatie van z en t uit de vergelijkingen (11)

Stelt men nu kortheidshalve

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= k_{11}\,x + k_{12}\,y + k_{13}, \\ U_2 &= k_{21}\,x + k_{22}\,y + k_{23}, \\ U_3 &= k_{31}\,x + k_{32}\,y + k_{33}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (12)$$

dan vindt men uit (11)

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{z\,e^{\rho_1 t}}{C_1}, \\ U_2 &= \frac{z\,e^{\rho_2 t}}{C_2}, \\ U_3 &= \frac{z\,e^{\rho_3 t}}{C_3}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Verheft men deze vergelijkingen achtereenvolgens tot de machten $\rho_2 - \rho_3$, $\rho_3 - \rho_1$ en $\rho_1 - \rho_2$, dan verkrijgt men

$$\left.\begin{aligned} U_1^{\rho_2-\rho_3} &= \frac{z^{\rho_2-\rho_3}\,e^{\rho_1(\rho_2-\rho_3)t}}{C_1^{\rho_2-\rho_3}}, \\ U_2^{\rho_3-\rho_1} &= \frac{z^{\rho_3-\rho_1}\,e^{\rho_2(\rho_3-\rho_1)t}}{C_2^{\rho_3-\rho_1}}, \\ U_3^{\rho_1-\rho_2} &= \frac{z^{\rho_1-\rho_2}\,e^{\rho_3(\rho_1-\rho_2)t}}{C_3^{\rho_1-\rho_2}}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (14)$$

en hieruit vindt men door vermenigvuldiging, waardoor z en t geëlimineerd worden,

$$U_1^{\rho_2-\rho_3}\,U_2^{\rho_3-\rho_1}\,U_3^{\rho_1-\rho_2} = H, \ldots\ldots\ldots (15)$$

waar H de willekeurige standvastige voorstelt.

Denzelfden vorm voor de algemeene integraal vindt men bij SERRET, »Cours de calcul differentiel et intégral", waar tevens de verschillende bijzondere gevallen behandeld worden, die betrekking hebben op het geval van gelijke wortels in de vergelijking (8).

Opmerking. Op dezelfde wijze, als boven de differentiaal-vergelijking van JACOBI geintegreerd is, kan het stelsel gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen

$$\frac{d\,x_1}{M_1 - x_1\,M_{n+1}} = \frac{d\,x_2}{M_2 - x_2\,M_{n+1}} = \frac{d\,x_3}{M_3 - x_3\,M_{n+1}} =$$
$$= \ldots . = \frac{d\,x_n}{M_n - x_n\,M_{n+1}},$$

worden geintegreerd. Hierbij stellen x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_n$ de n veranderlijken voor en M_1, M_2, $M_3 \ldots . M_n$, M_{n+1} lineaire functien dier veranderlijken, namelijk

$$M_1 = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1,n}\,x_n + a_{1,n+1},$$
$$M_2 = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \ldots + a_{2,n}\,x_n + a_{2,n+1},$$
$$M_3 = a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \ldots + a_{3,n}\,x_n + a_{3,n+1};$$

en zoo voort.

Als integraal verkrijgt men dan een stelsel van $n-1$ vergelijkingen van den vorm (15).

OVER HET STELSEL VAN RECHTE LIJNEN IN DE RUIMTE, WIER EERSTE EN DERDE PROJECTIEN SAMENVALLEN.

DOOR

H. DE VRIES.

---

§ 1. Bij de behandeling van de beginselen der beschrijvende meetkunde komt men als het ware van zelf tot vragen als deze: waar liggen alle punten of alle rechte lijnen in de ruimte, wier beide projectien samenvallen? of ook: hoe liggen alle vlakken in de ruimte, wier beide doorgangen samenvallen? Zooals bekend is, luidt het antwoord hierop als volgt: alle punten en rechte lijnen, wier beide projectien samenvallen, liggen in een zeker plat vlak, dat wij $H_{x'}$ zullen noemen, dat door de as van projectie x gaat, en den tweeden en vierden tweevlakkigen hoek middendoor deelt; en alle vlakken, wier beide doorgangen samenvallen, staan loodrecht op dat zelfde vlak $H_{x'}$.

Zooals Wilhelm Fiedler in Zürich reeds voor vele jaren heeft aangetoond, speelt het vlak $H_{x'}$ in de beschrijvende meetkunde eene zeer voorname rol: ieder willekeurig ander vlak V toch snijdt $H_{x'}$ volgens eene zekere rechte lijn $h_{x'}$, de eenige rechte lijn in V, wier beide projectien samenvallen (wanneer men van de oneindig verre afziet); en aangezien ook van alle punten van $h_{x'}$ de beide projectien samenvallen,

moeten de beide projectien g' en g'' van iedere willekeurige rechte in V elkaar steeds in een punt van de gemeenschappelijke eerste en tweede projectie $h_{x'}{}'{}''$ van $h_{x'}$ ontmoeten; waaruit dan onmiddellijk verder volgt, dat er tusschen de beide projectien van iedere willekeurige rechtlijnige of kromlijnige figuur in V steeds affiniteit heerscht; want de verbindingslijnen van overeenkomstige punten der beide figuren staan alle loodrecht op de as van projectie x, en zijn dus onderling evenwijdig; en de snijpunten van alle overeenkomstige lijnen liggen op eene rechte lijn, de affiniteitsas $h_{x'}{}'{}''$.

§ 2. Voegt men bij het horizontale en verticale projectievlak nog een derde, dat loodrecht staat op de beide eerste en dus ook op de x-as, en vraagt men nu naar alle punten of rechten of vlakken, wier tweede en derde projectien of doorgangen samenvallen, dan luidt het antwoord weer als zooeven: de punten en rechten liggen in, en de vlakken staan loodrecht op een zeker vlak $H_{z'}$, dat door de z-as gaat, en twee der vier rechte hoeken tusschen het tweede en derde projectievlak middendoor deelt; zoodat ook steeds tusschen de tweede en derde projectie eener vlakke figuur affiniteit heerscht.

Maar geheel andere uitkomsten verkrijgt men, wanneer men nu ook nog de derde mogelijkheid onderzoekt, en dus naar de meetkundige plaats vraagt van alle punten, rechten en vlakken, die de eigenschap hebben, dat de eerste en derde projectien of doorgangen samenvallen; hoewel toch voorzeker deze laatste vraag evenzoo natuurlijk is als de beide voorgaande. De oorzaak van dit verschil is te zoeken in de wijze, waarop men gewoon is de drie projectievlakken tot één enkel vlak van teekening te vereenigen; eene methode, die wel is waar, van uit een theoretisch oogpunt beschouwd, geheel willekeurig is, maar die nu eenmaal ten gevolge van de groote autoriteit van Monge, die zich hierin door practische overwegingen liet leiden, als het ware tot wiskundige wet is verheven, en waaraan wij ook hier des te liever en met des te meer recht zullen vasthouden, aangezien bij iedere andere wijze van vereeniging der drie projectievlakken zich steeds

het verschijnsel zal blijven voordoen, dat twee der drie bovengenoemde mogelijkheden gelijkluidende oplossingen hebben; terwijl daarentegen de oplossing der derde geheel anders, en veel minder eenvoudig zal uitvallen.

Volgens de voorschriften van MONGE wordt het derde projectievlak met het tweede vereenigd, door het eerstgenoemde met het voorgedeelte naar links om de z-as te laten draaien; daarna draaien het vereenigde tweede en derde projectievlak om de x-as, en wel zoodanig, dat het bovengedeelte zich van den beschouwer af beweegt. Hierbij behoeft dus het derde projectievlak slechts ééne draaiende beweging uit te voeren om op het tweede, en dit ook slechts weer eenmaal te draaien, om op het eerste te komen liggen, terwijl daarentegen het derde eerst om de z-as en dan nog eens om de x-as moet draaien, om zich met het eerste te kunnen vereenigen; het is duidelijk, en wij zullen het naderhand nog uitvoerig bewijzen (men vergelijke § 11), dat hierin alleen de oorzaak te zoeken is van het verschil in uitkomsten tusschen de derde en de beide eerste mogelijkheden.

Wij gaan er nu in het volgende toe over, deze derde mogelijkheid meer in het bijzonder te beschouwen, en daarbij zal het ons streven zijn de uitkomsten, die wij zullen kunnen verkrijgen, ook langs den meest eenvoudigen weg te vinden; want ondanks hare betrekkelijke samengesteldheid ten opzichte van de beide andere mogelijkheden, heeft toch ook zij haren oorsprong in de elementen der beschrijvende meetkunde, wat ook haar aanspraak geeft op eene eenvoudige behandeling.

§ 3. Zullen van een punt P in de ruimte de eerste en derde projectie samenvallen, dan moeten alle drie de projectien samenvallen; want P'' ligt op de loodlijn, van uit P' op de x-as, en tevens op die van uit P''' op de y-as neergelaten, welke twee loodlijnen elkaar, voor het geval dat P' en P''' samenvallen, natuurlijk juist in dit zelfde punt $P'^{,'''}$ zullen snijden; waardoor dus dat punt aangeduid moet worden door de notatie $P'^{,'',\,'''}$. Alle punten P, die de aangeduide eigenschap bezitten, dat hunne drie projectien

samenvallen, liggen op eene zekere rechte lijn d_y, die door het snijpunt O der drie projectievlakken gaat, met alle drie gelijke hoeken insluit, en opgevat kan worden als de gemeenschappelijke snijlijn der drie vlakken $H_{x'}$, H_y, $H_{z'}$, waarvan ieder twee der hoeken tusschen twee der drie projectievlakken middendoor deelt; waarbij wij, wat de notatie betreft, geregeld den regel volgen aan die vlakken het accent te geven, die niet door den eersten drievlakkigen hoek gaan. De lijn d_y kan ook opgevat worden als diagonaal van een kubus, waarvan één hoekpunt zich in O bevindt, terwijl de drie door dit hoekpunt gaande zijvlakken met de drie projectievlakken samenvallen; daar van alle punten van d_y de drie projectien samenvallen, vallen ook van de lijn zelf de drie projectien samen (fig. 1).

Er bestaan nog drie andere dergelijke lijnen door O: de snijlijn d van H_x, H_y, H_z, de snijlijn d_x van H_x, $H_{y'}$ en $H_{z'}$, en de snijlijn d_z van $H_{x'}$, $H_{y'}$, H_z. Van alle vier lijnen d zijn in figuur 1 de drie projectien aangegeven; voor ons is in het bijzonder opmerkenswaardig, dat van de lijn d de eerste en derde projectie samenvallen, zoodat ook zij tot het stelsel van lijnen behoort, dat wij willen onderzoeken.

Evenals het samenvallen van eerste en derde projectie van een punt ten gevolge heeft, dat alle drie de projectien samenvallen, kunnen ook de eerste en derde doorgang van een vlak niet samenvallen, zonder dat alle drie de doorgangen samenvallen; en terwijl alle behandelde punten de puntenreeks op d_y vormen, bewijst men op hoogst eenvoudige wijze, dat alle vlakken met drie vereenigde doorgangen den vlakkenbundel vormen, waarvan alle exemplaren loodrecht staan op d_y; ook hier een belangrijk voorbeeld voor de reciprociteit van het punt en het vlak in de ruimte.

§ 4. In de zooeven genoemde reciprociteit staat de rechte lijn op zich zelf; zij is aan zich zelf reciprook, en daarmede is geheel in overeenstemming, dat zij ook met betrekking tot ons vraagstuk eene andere rol speelt dan de beide overige ruimteelementen. Neemt men namelijk in het vlak van teekening eene willekeurige rechte lijn als gelijktijdige eerste en derde projectie $g'^{\prime\prime\prime}$ van eene rechte g in de ruimte aan, en denkt

men dan de drie projectievlakken weer tot hun oorspronkelijken stand in de ruimte terug gebracht, dan zal het in het algemeen steeds mogelijk zijn van de beide projecteerende vlakken door g' en g''' op het eerste en derde projectievlak eene ondubbelzinnig bepaalde snijlijn g te verkrijgen, waarvan dan g' en g''' twee projectien zijn; hieruit volgt, dat in het algemeen iedere willekeurige rechte $g'^{,'''}$ in het vlak van teekening ééne volkomen bepaalde rechte g in de ruimte voorstelt; en aangezien het aantal rechte lijnen in het vlak van teekening oneindig in het kwadraat bedraagt, zal het aantal lijnen van ons ruimtestelsel ook zoo groot zijn; dit stelsel is dus eene congruentie.

Wij kunnen oogenblikkelijk inzien, dat door een willekeurig punt P in de ruimte in het algemeen slechts één straal der congruentie heengaat; want de eerste en derde projectie van eene door P gaande rechte g kunnen alleen maar dan samenvallen, wanneer zij beide in de verbindingslijn $P' P'''$ vallen; en daar deze verbindingslijn in het algemeen ondubbelzinnig bepaald is, zal ook de straal g door P dit in het algemeen zijn. Maar de verbindingslijn $P' P'''$ wordt onbepaald, zoodra de beide punten P' en P''' zich tot één enkel punt vereenigen, wat, zooals wij in § 3 vonden, geschiedt, wanneer P zelf op d_y ligt; in dit geval kan iedere lijn door $P'^{,'''}$ als $g'^{,'''}$ worden opgevat, zoodat door ieder punt van d_y niet slechts één, maar oneindig vele stralen der congruentie heengaan; juist zooveel namelijk, als er stralen in het vlak van teekening door $P'^{,'''}$ getrokken kunnen worden.

Ook het omgekeerde van deze laatste stelling is waar. Iedere straal der congruentie moet in het algemeen de lijn d_y snijden. Want het snijpunt van $g'^{,'''}$ met g'' in het vlak van teekening stelt in de ruimte een punt van g voor, waarvan de drie projectien samenvallen, en dat dus volgens § 3 op d_y ligt.

Maar er bestaan ook stralen der congruentie, die op deze stelling eene uitzondering maken, en die dus d_y niet snijden, hoewel toch hunne eerste en derde projectie samenvallen; dat zijn namelijk alle oneindig verre lijnen in de ruimte. Want van deze liggen alle projectien steeds in het oneindige, en dus

vereenigd, ook dan, wanneer zij niet door het oneindig verre punt van d_y gaan. Wij zullen echter weldra leeren inzien, dat deze uitzondering op den regel slechts schijnbaar bestaat, en dat zij hare oorzaak alleen heeft in het nauwkeurig opvolgen van eene andere en uitgebreidere wet.

Ten einde het karakter onzer congruentie nauwkeurig te leeren kennen, willen wij nu vragen naar het aantal van hare stralen, die in een willekeurig vlak V liggen. Dit vraagstuk is opgelost in den derden jaargang der »*Monatshefte für Mathematik und Physik*" *Seite* 92—96 door den heer Emil Waelsch, in een klein opstel, dat echter door de groote menigte van drukfouten niet gemakkelijk te ontcijferen is, en dat ik toevallig in handen kreeg juist op den dag, toen ik, op verzoek van Professor Fiedler, over de hier behandelde congruentie in het »mathematische Seminar" in Zürich eene voordracht hield.

Van de verschillende oplossingen, die de heer Waelsch mededeelt, zullen wij er slechts ééne teruggeven, terwijl wij later nog eene andere zullen ontdekken, die bij Waelsch niet voorkomt, en die eenvoudiger is in hare toepassing dan de zijne.

Één straal der congruentie in het vlak V kennen wij reeds, namelijk de oneindig verre lijn van V; alle andere, — en wij zullen vinden, dat hun aantal twee bedraagt, — moeten volgens het zooeven bewezene door het snijpunt D_y gaan van V met d_y. Denken wij nu van alle stralen door D_y en in V de eerste en derde projectie bepaald, dan ontstaan in het vlak van teekening twee stralenbundels met het gemeenschappelijk toppunt $D_y{}'{\cdot}''{\cdot}'''$, die ieder voor zich perspectivisch liggen met den oorspronkelijken stralenbundel in V, en dus onder elkaar projectivisch zijn; hunne beide bestaanbare en verschillende, of samenvallende, of toegevoegd onbestaanbare dubbelstralen zijn de projectien van de twee eenige stralen der congruentie, die in V liggen en door D_y gaan. Telt men de oneindig verre lijn van V mede, dan liggen er in ieder vlak V in het algemeen drie; door ieder punt P gaat en slechts één; het karakter onzer congruentie is dus (1.3.). Zij komt dus in karakter geheel overeen met de congruentie

der koorden eener ruimtekromme R^3, en wij zullen zelfs gelegenheid hebben te bewijzen, dat zij inderdaad eene zoodanige congruentie is.

Wij willen echter eerst nog opmerken, dat men van de beide projectivische stralenbundels met het gemeenschappelijk toppunt $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ gemakkelijk de drie paren van overeenkomstige stralen vinden kan, die noodig zijn om de projectiviteit der bundels te bepalen; men kan bij voorbeeld door D_y de drie lijnen in V trekken, die evenwijdig zijn aan de drie doorgangen van V, en van ieder dezer lijnen de eerste en derde projectie aangeven; daardoor verkrijgt men als het eerste paar a', a''', de twee lijnen door $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ evenwijdig aan den eersten doorgang van V en aan de x-as; als tweede paar b', b''' de lijnen evenwijdig aan x en y; en als derde paar c', c''' de lijnen evenwijdig aan y en aan den derden doorgang van V. Of men kan ook D_y verbinden met de snijpunten van V met de drie assen van projectie, en deze lijnen projecteeren; of beide methoden verbinden, en zoo voort.

§ 5. Wij zagen in § 4, dat door ieder punt van d_y oneindig vele stralen der congruentie heengaan; de natuurlijke voortzetting van onze beschouwingen zal dus het onderzoek van het kegeloppervlak zijn, waarop al deze stralen gelegen zijn. Deze kegel is van den tweeden graad, omdat ieder vlak door zijn toppunt D_y twee stralen der congruentie bevat, die door D_y gaan; hij snijdt zoowel het eerste als het derde projectievlak volgens eene parabool, het tweede daarentegen volgens eene gelijkzijdige hyperbool, wier asymptoten, na de vereeniging der drie projectievlakken, evenwijdig aan de x- en y-as loopen.

Wanneer in fig. 2, $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ het op de lijn $d_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ willekeurig aangenomen punt is, en $g^{\prime,\prime\prime\prime}$ twee projectien van een door D_y gaanden straal onzer congruentie voorstelt, dan vindt men van dezen straal het eerste doorgangspunt S_1, door van uit het punt A* de lijn te trekken evenwijdig aan de x-as en deze lijn met $g^{\prime,\prime\prime\prime}$ te snijden; draait dan de lijn $g^{\prime,\prime\prime\prime}$ om $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$, dan ontstaat op de x-as eene puntenreeks $(A, A_1, A_2, \ldots)$ en op de y-as eene daarmede congruente en

perspectivisch liggende reeks ($A^*, A_1^*, A_2^*, \ldots$). De eerste wordt geprojecteerd van uit het punt $D_y'^{,'',''' }$, de tweede van uit het oneindig verre punt X_∞ der x-as, waardoor twee stralenbundels ontstaan, die onder elkaar projectivisch zijn; en aangezien de snijpunten der paren van overeenkomstige stralen dezer bundels de eerste doorgangspunten der congruentiestralen door D_y zijn, is de eerste doorgang van den te onderzoeken kegel eene kegelsnede, de kegel zelf dus van den tweeden graad. Deze kegelsnede nu is eene parabool P_1, die het punt $D_y'^{,'',''' }$ tot top en de lijn door dit punt evenwijdig aan de x-as tot symmetrie-as heeft; want men bewijst zeer eenvoudig, dat de overeenkomstige stralen van den gemeenschappelijken straal $D_y'^{,'',''' } X_\infty$ in den eenen bundel de oneindig verre lijn, en in den anderen de lijn evenwijdig aan de y-as is; deze overeenkomstige stralen echter zijn de raaklijnen in X_∞ en $D_y'^{,'',''' }$.

De x-as zelf en $d_y'^{,'',''' }$ zijn eveneens twee overeenkomstige stralen der beide bundels, omdat het punt O in de beide puntenreeksen ($A, \ldots$) en ($A^*, \ldots$) met zich zelf overeenkomt; de parabool P_1 gaat dus door O, en dus ook door het ten opzichte van A_1^* symmetrische punt A_2^* van O; en wanneer wij nu de zooeven gevonden uitkomsten overdragen op den kegel, kunnen wij aan dezen de volgende eigenschappen waarnemen. Hij bezit eene horizontale beschrijvende lijn g_h in $H_{x'}$, die evenwijdig is aan de x-as en wier raakvlak ook weer horizontaal is; verder eene verticale g_v in $H_{z'}$, wier raakvlak evenwijdig is aan het derde projectievlak; dan bevat hij de lijn $D_y O$ of d_y, en eindelijk de lijn $D_y A_2^*$ of g_d, die in het vlak H_y ligt, evenals d_y, en evenwijdig is aan de in § 3 genoemde lijn d.

Wij willen ook van deze beide laatste lijnen d_y en g_d de raakvlakken aan den kegel trachten te vinden; de eerste doorgangen daarvan zijn de raaklijnen in O en A_2^* aan P_1, die elkaar op de as $g_h'^{,''}$ van P_1 moeten ontmoeten. De raaklijn in O aan P_1 nu vinden wij bij voorbeeld op de volgende wijze: daar $\angle O D_y'^{,'',''' } A_2^* = \angle X_\infty D_y'^{,'',''' } A_1 = 90°$ is, en de beenen van den eenen hoek den anderen middendoor deelen, vormen de vier stralen, waaruit de beenen dezer

twee hoeken bestaan, een harmonischen bundel; van uit ieder ander punt van P_1 moeten nu de vier punten X_∞, $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$, A_2* en O eveneens door een harmonischen stralenbundel geprojecteerd worden; dus ook van uit het punt O zelf, dat wil zeggen, de drie stralen O X_∞, O $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$, O A_2* en de raaklijn in O aan P_1 vormen een harmonischen bundel. Snijdt men dezen stralenbundel met de lijn $g_v{}^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$, dan verkrijgt men de punten A_1, $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ en het oneindig verre punt van $g_v{}^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$; het vierde harmonische van dit laatste met betrekking tot de beide eerste, dus het snijpunt met de gevraagde raaklijn in O, ligt in het midden tusschen A_1 en $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$, of, wat hetzelfde is, de raaklijn in O gaat door het punt C, dat evenver van $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ verwijderd is als A_1*. De raaklijn in A_2* gaat dus ook door C, waaruit volgt, dat de snijlijn der beide raakvlakken langs d_y en g_d aan den kegel niets anders is dan de lijn C D_y; en omdat deze lijn klaarblijkelijk loodrecht staat op het vlak H_y (waarin, zooals wij zooeven zagen, de beide lijnen d_y en g_d zelf gelegen zijn) staan de raakvlakken langs deze lijnen eveneens op het vlak H_y loodrecht, wat voor het vervolg van gewicht zal blijken te zijn.

Construeert men van alle stralen g door D_y de derde doorgangspunten, dan vindt men als derden doorgang van onzen kegel weer eene parabool P_3, gelijk en gelijkvormig aan P_1, en symmetrisch daarmede gelegen met betrekking tot de lijn $d_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$; ook zij gaat door O, en heeft $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ tot top; hare as is de lijn $g_v{}^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$ evenwijdig aan de y-as. Construeert men daarentegen de tweede doorgangspunten, dan vindt men als meetkundige plaats daarvan, of als tweeden doorgang van den kegel, eene gelijkzijdige hyperbool H_2, die de beide lijnen $d_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ en $g'_d{}^{\prime\prime\prime}$ tot assen en $g_h{}^{\prime,\prime\prime}$ en $g_v{}^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$ tot asymptoten, en dus $D_y{}^{\prime,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ tot middelpunt heeft; de beide toppen zijn O en het tweede doorgangspunt $S_2 g_d$ van g_d.

§ 6. De snijlijn der beide raakvlakken langs g_h en g_v, die door D_y gaat en evenwijdig loopt aan de y-as, is de poolstraal van het vlak $g_h g_v$, dat evenwijdig is aan het verticale projectievlak; maar deze poolstraal staat op zijn poolvlak

loodrecht, waaruit volgt, dat de poolstraal ééne der assen, en het vlak $g_h\, g_v$ één der hoofd- of symmetrievlakken van den kegel is; wat bij voorbeeld toegelicht wordt door de beide lijnen d_y en g_d, die inderdaad ten opzichte van dit vlak symmetrisch liggen.

Wij zagen echter ook, dat de beide raakvlakken langs d_y en g_d op het vlak H_y loodrecht staan; dit vlak is dus het tweede symmetrievlak, en de lijn C D_y de tweede as van den kegel; en dit wordt weer toegelicht door de beide lijnen g_h en g_v. Het derde en laatste hoofdvlak is dus het vlak door D_y evenwijdig aan $H_{y'}$; de derde as de loodlijn in D_y op dit vlak.

Ieder vlak evenwijdig aan $H_{y'}$ snijdt onzen kegel volgens eene ellips; brengen wij het vlak in het bizonder door het punt $S_2\, g_d$, het eene toppunt van H_2, dan is de tweede doorgang de lijn E F, de topraaklijn van H_2, terwijl de eerste loodrecht op de x-as staat. Van de ellips E nu, die dit vlak uit den kegel snijdt, projecteert zich de kleine as in ware grootte in de lijn $A_2\, S_2\, g_d$, de groote daarentegen, eveneens in ware grootte, in de lijn E F; en aangezien deze twee lijnen klaarblijkelijk tot elkaar in verhouding staan als $1 : \sqrt{2}$, vinden wij de stelling, dat ieder vlak evenwijdig aan $H_{y'}$ den kegel snijdt volgens eene ellips, waarvan de assen zich verhouden als $1 : \sqrt{2}$. Bovendien liggen deze ellipsen steeds in vlakken, die zoowel met het eerste als met het derde projectievlak hoeken insluiten van 45°; zoowel de eerste als de derde projectien zijn dus cirkels, die alle door het punt $D_y'^{,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ gaan, en de lijnen $g_h'^{,\prime\prime}$ en $g_v''^{,\prime\prime\prime}$ tot centralen hebben. Zoo zijn bijvoorbeeld van de ellips E in het vlak door $S_2\, g_d$ de eerste en derde projectie cirkels E' en E''', die door $D_y'^{,\prime\prime,\prime\prime\prime}$ gaan en de punten C en D tot middelpunten hebben.

Met behulp van deze cirkels nu kunnen wij het vraagstuk, dat reeds in § 4 werd opgelost, (de stralen onzer congruentie te vinden, die in een willekeurig vlak V liggen), langs den volgenden, meer eenvoudigen weg, nogmaals oplossen: de beide gezochte stralen (wanneer wij van den derden oneindig verren afzien) zijn de snijlijnen g_1 en g_2 van V met den

kegel, die het snijpunt D_y van V met d_y tot toppunt heeft. Is dus in fig. 2 het vlak met de doorgangen d_1, d_2 een vlak, dat het punt D_y bevat, en snijden wij dit vlak met het vlak evenwijdig aan $H_{y'}$, dat de hierboven genoemde ellips E draagt, dan zullen de beide verbindingslijnen van D_y met de beide snijpunten van E met de snijlijn s der beide vlakken de gezochte stralen g_1 en g_2 zijn. Maar deze ruimteconstructie laat zich bizonder eenvoudig in werkelijkheid uitvoeren, omdat twee projectien van E cirkels zijn; construeeren wij bij voorbeeld van de snijlijn s de eerste projectie s', dan hebben wij deze eenvoudig met den cirkel E' in P′ en Q′ te snijden, om in de beide stralen van $D_y'^{,'',''' }$ naar deze twee punten de eerste en dus ook de derde projectien van g_1 en g_2 te vinden, waardoor deze zelf in de ruimte hepaald zijn.

Men kan echter ook, in plaats van s', s''' construeeren en deze met E''' in P‴ en Q‴ snijden; dan moet men echter juist dezelfde twee lijnen van zooeven weer terugvinden, omdat de eerste en derde projectien dezer lijnen samen moeten vallen; dat wil dus zeggen, (fig. 2) dat P′ en P‴ en evenzoo Q′ en Q‴ met $D_y'^{,'',''' }$ op twee rechte lijnen $g_1'^{,'''}$ en $g_2'^{,'''}$ moeten liggen.

§ 7. Wij gaan ten slotte over tot de laatste hoofdeigenschap van onzen kegel, om daarna het stelsel van alle kegels te onderzoeken, die men verkrijgt, door het punt D_y de geheele lijn d_y te laten doorloopen.

Iedere kegel van den tweeden graad kan op oneindig vele verschillende wijzen ontstaan uit twee projectivische vlakkenbundels, waarvan de ribben door het middelpunt van den kegel gaan; twee willekeurige beschrijvende lijnen van den kegel kunnen als ribben van zulke bundels opgevat worden.

Nemen wij nu eerst de beide lijnen d_y en g_d in het vlak H_y als ribben van twee projectivische vlakkenbundels aan, dan kunnen wij van deze dadelijk vier paren van overeenkomstige vlakken aangeven, dus zelfs nog één paar meer dan voor de bepaling der projectiviteit noodig is. Bij het vlak $d_y g_d$ of H_y behoort namelijk het raakvlak langs g_d,

dat volgens § 5 op H_y loodrecht staat; bij het raakvlak langs d_y behoort omgekeerd het vlak H_y, en ook deze twee overeenkomstige vlakken staan loodrecht op elkaar; bij het vlak $d_y\,g_h$ of $H_{x'}$ behoort $g_d\,g_h$, dat evenwijdig is aan H_x en dus op $H_{x'}$ loodrecht staat; en eindelijk behoort bij het vlak $d_y\,g_v$ of $H_{z'}$, het vlak $g_d\,g_v$, dat evenwijdig is aan H_z en dus op $H_{z'}$ loodrecht staat.

Van de vier paren van overeenkomstige vlakken, die wij kennen, staat dus steeds ieder vlak op zijn overeenkomstig loodrecht; daaruit volgt, dat dan ook alle andere paren onderling loodrecht zijn, en dat dus onze kegel in de ruimte op overeenkomstige wijze ontstaan kan als een cirkel in het vlak; het is een zoogenaamde orthogonale kegel, zooals Hachette dien voor het eerst ontdekt heeft [1]); en hij heeft dus onder anderen de verdere merkwaardige eigenschap, dat ieder vlak, dat loodrecht op d_y of g_d staat, hem volgens een cirkel snijdt. Wij zagen echter, dat voor onze doeleinden deze cyclische doorsneden niet de meest gewenschte waren, omdat hare projectien ellipsen zijn; wij gebruikten met voordeel elliptische doorsneden, wier projectien integendeel cirkels waren.

Men weet verder, dat iedere orthogonale kegel niet slechts op ééne enkele wijze uit twee projectivische vlakkenbundels met loodrecht op elkaar staande overeenkomstige vlakken, maar bovendien op oneindig vele verschillende manieren uit twee congruente bundels ontstaan kan, — uit bundels dus, die de eigenschap hebben, dat ieder willekeurig paar vlakken A, B in den eenen denzelfden hoek insluiten als hunne overeenkomstige A', B' in den anderen; — ieder paar beschrijvende lijnen van onzen kegel, die symmetrisch liggen ten opzichte van het vlak $d_y\,g_d$ of H_y, kunnen als ribben van twee zulke bundels worden aangezien. Dit kunnen wij aan onzen kegel nu gemakkelijk nagaan met behulp der beide beschrijvende lijnen g_h en g_v, die inderdaad ten opzichte van H_y symmetrisch zijn: bij de vlakken $g_v\,g_h$, $g_v\,g_d$, het raakvlak langs g_v en $g_v\,d_y$, die achtereenvolgens hoeken van 45° met elkaar insluiten, behooren: het raakvlak langs g_h, $g_h\,g_d$, $g_h\,g_v$

1) *Correspondance sur l'école impér. polyt.* I.

en $g_h d_y$, die dit eveneens doen; waardoor bevestigd is, dat deze beide bundels congruent zijn.

§ 8. Gedurende al onze voorafgaande beschouwingen hebben wij steeds het punt D_y als een vast punt van d_y aangezien; wij kunnen nu van deze veronderstelling afzien, en vragen, wat er zal geschieden, wanneer het punt D_y de geheele lijn d_y gaat doorloopen. In iederen nieuwen stand zal D_y weer het middelpunt zijn van een nieuwen kegel van den tweeden graad, die met al de eigenschappen zal zijn toegerust, die wij aan den eersten ontdekt hebben; als voor ons nieuw komt daarbij nu echter de eigenschap, dat al deze nieuwe kegels onder elkaar, en dus ook met betrekking tot den ouden, evenwijdig en dus gelijk en gelijkvormig zijn, of, zoo als wij ons liever uit willen drukken, dat zij alle dezelfde oneindig verre kegelsnede, K_∞, bevatten.

Inderdaad, wanneer van twee rechte lijnen in de ruimte twee paren van gelijknamige projectien evenwijdig zijn, dan zijn ook de lijnen in de ruimte zelf evenwijdig; denkt men nu door twee willekeurige punten van $d_y'^{.''.'''}$ de stralenbundels in het vlak van teekening getrokken; dan behoort bij iederen straal van den eersten bundel een aan dien straal evenwijdige uit den tweeden; geeft men dan aan den eenen straal de notatie $g_1'^{.'''}$ en aan den anderen $g_2'^{.'''}$, dan zijn van de daardoor bepaalde stralen g_1 en g_2 onzer congruentie werkelijk twee paren gelijknamige projectien, (de eerste en derde namelijk,) evenwijdig, zoodat ook g_1 en g_2 zelf evenwijdig zijn; bij iedere beschrijvende lijn van één kegel behoort dus steeds eene daaraan evenwijdige beschrijvende lijn van iederen anderen kegel; alle kegels zijn dus onderling evenwijdig, en bezitten ten gevolge daarvan dezelfde oneindig verre kegelsnede K_∞.

Bedenkt men verder, dat ook alle kegels de lijn d_y en het raakvlak langs die lijn gemeen hebben (want wij zagen in § 5, dat dit vlak steeds loodrecht op H_y moet staan), dan vindt men, dat zij, alle te zamen genomen, een zeer bizonderen bundel van vlakken van den tweeden graad vormen. Zij gaan inderdaad alle door dezelfde ruimtekromme R^4;

maar deze ruimtekromme bestaat uit de kegelsnede K_∞ en uit de lijn d_y, deze laatste echter tweemaal geteld, van wege het aan alle kegels gemeenschappelijke raakvlak langs d_y.

Voor het oneindig verre punt van d_y als kegelmiddelpunt ontaardt de kegel in het oneindig verre vlak zelf en het gemeenschappelijke raakvlak; en door deze eigenschap worden wij nu in staat gesteld de schijnbare uitzondering, die wij op eene stelling van § 4 vonden, aangaande de snijpunten van de stralen onzer congruentie met d_y, te doen verdwijnen. Want daar de lijn d_y, als gemeenschappelijke beschrijvende lijn van alle kegels uit den bundel, de kegelsnede K_∞ moet snijden, kan het stelsel, dat bestaat uit deze lijn en de kegelsnede K_∞, worden aangezien als eene ontaarde ruimtekromme R^3; vat men echter de zaak zoo op, dan is iedere straal g onzer congruentie, en nu ditmaal geheel zonder uitzondering, eene koorde van R^3: iedere niet oneindig ver liggende straal verbindt een punt van d_y met een van K_∞; iedere oneindig ver liggende daarentegen snijdt K_∞ in twee punten, en iedere oneindig ver liggende, die tegelijk door het oneindig verre punt van d_y gaat, bevat zelfs drie punten van het stelsel R^3.

Onder alle kegels van den bundel is er één, dien wij nog een weinig nauwkeuriger moeten beschouwen, omdat hij ons den stand van K_∞ beter doet kennen dan de andere: het is de kegel, wiens middelpunt in O ligt. Deze bevat, behalve de lijn d_y, de x-as, de z-as en de lijn d, terwijl de raakvlakken langs de x en de z-as het eerste en derde projectievlak zelf zijn. K_∞ bevat dus, behalve de richtingen van d_y en van d, ook die van de x- en z-as, terwijl zij in de beide laatstgenoemde punten bovendien het eerste en derde projectievlak raakt; zij is dus symmetrisch ten opzichte van het tweede projectievlak, en kan eveneens als symmetrisch aangezien worden ten opzichte van het vlak H_y.

§ 9. Het kan niet ons doel zijn alle uitkomsten, die wij tot nu toe door zuiver meetkundige beschouwingen gevonden hebben, nog eens op nieuw door berekening te willen vinden; maar het is misschien toch niet geheel overbodig, van den

kegel D_y en den kegelbundel ten minste de vergelijkingen op te stellen.

Is eene rechte lijn in de ruimte gegeven door hare eerste projectie $x = a\,y + b$ en hare derde, $y = a_1\,z + b_1$, en vereenigt men het derde projectievlak met het tweede, dan moet men $+y$ vervangen door $-x$ en omgekeerd, zoodat dan de vergelijking der derde projectie luidt $-x = a_1\,z + b_1$. Door nu het vereenigde tweede en derde projectievlak in het eerste neer te leggen, wordt $+z$ door $-y$ vervangen en omgekeerd; dus luidt dan de vergelijking $-x = -a_1\,y + b_1$ of $x = a_1\,y - b_1$, terwijl daarentegen die der eerste projectie onveranderd is gebleven $x = a\,y + b$.

Zullen nu de eerste en derde projectie samenvallen, dan moet $a_1 = a$ en $b_1 = -b$ zijn, zoodat de vergelijkingen oorspronkelijk geweest moeten zijn

$$x = a\,y + b \quad \text{en} \quad y = a\,z - b.$$

Hierin zijn a en b willekeurige, van elkaar onafhankelijke grootheden, zoodat het aantal lijnen, die aan deze vergelijkingen voldoen, inderdaad dat eener congruentie is.

Kiest men voor x, y, z willekeurige waarden x_0, y_0, z_0, dan laten zich in het algemeen a en b bepalen; door ieder punt P gaat dus één straal der congruentie, en zoo voort.

Verhouden zich daarentegen x_0, y_0, z_0 als λ, $-\lambda$, λ, dan verkrijgt men $\lambda = -a\,\lambda + b$ en $-\lambda = a\,\lambda - b$, of weer $\lambda = -a\,\lambda + b$; door een punt van d_y gaan dus oneindig vele stralen der congruentie. De vergelijking van den kegel, waarop al deze stralen liggen, vindt men op de volgende wijze: daar $x = a\,y + b$ en in het bizonder $\lambda = -a\,\lambda + b$ is, is ook

$$(x - \lambda) = a\,(y + \lambda).$$

En evenzoo vindt men

$$(y + \lambda) = a\,(z - \lambda).$$

Door eliminatie van a uit deze beide vergelijkingen vindt men als vergelijking van den kegel met het middelpunt $(\lambda, -\lambda, \lambda)$

$$(y + \lambda)^2 = (x - \lambda)\,(z - \lambda);$$

en deze vergelijking stelt tegelijk den geheelen kegelbundel voor, wanneer men λ niet als standvastig, maar als een ver-

anderlijken parameter behandelt. Zoo ontstaat bij voorbeeld voor $\lambda = 0$ de zooeven behandelde kegel met het middelpunt in O

$$y^2 = x\,z.$$

§ 10. In het voorgaande zijn alle hoofdeigenschappen der congruentie, die wij wilden onderzoeken, aan het licht getreden; volledigheidshalve willen wij echter nog éène vraag opwerpen en in het kort bespreken, om daarna nog opmerkzaam te maken op een geheel ander standpunt, van waar uit men ons vraagstuk kan oplossen, waarbij dan echter het elementaire karakter daarvan geheel verloren gaat.

Wij onderzochten, hoeveel stralen g der congruentie door een willekeurig punt gaan, en hoeveel er in een willekeurig vlak liggen: gaan wij nu nog na, hoeveel er eene willekeurige rechte l in de ruimte snijden. Natuurlijk oneindig veel, want door ieder punt van l gaat er een.

Daar nu al deze stralen g de gemeenschappelijke transversalen zijn van l, d_y en K_∞, moeten zij op een regeloppervlak O^4 van den vierden graad gelegen zijn; maar d_y en K_∞ snijden elkaar; het vlak door dit snijpunt en l zondert zich af van O^4, omdat de transversalen, die daarin liggen, niet tot de congruentie behooren; als eigenlijke meetkundige plaats van alle congruentiestralen, die l snijden, blijft dus over een regeloppervlak O^3, dat l tot richtlijn en d_y tot dubbellijn heeft; want door ieder punt van l gaat één straal g, in ieder vlak door l daarentegen liggen er twee, die elkaar op d_y ontmoeten. Twee vlakken gaan er in het algemeen door l, waarin de beide stralen g samenvallen, en langs welke dus O^3 afwikkelbaar is; dat zijn de beide raakvlakken door l aan K_∞, die men wel op de eenvoudigste wijze vinden kan met behulp van de lijn l^* door O evenwijdig aan l en den kegel, die O tot middelpunt heeft.

De doorsnede van O^3 met het oneindig verre vlak bestaat uit K_∞ en de verbindingslijn der richtingen van d_y en l; die met het eerste projectievlak uit eene vlakke kromme K^3 van den derden graad met een dubbelpunt in O en een parabolisch punt in het oneindig verre punt der x-as; die

met het derde projectievlak uit eene dergelijke kromme; en zoo voort.

Snijdt l zelf de kegelsnede K_∞, dan ontaardt O^3 in het vlak door dit snijpunt en d_y en in eene hyperboloïde, die K_∞ tot oneindig verre kegelsnede heeft, en wier asymptotenkegel dus evenwijdig is aan de kegels van onzen vroegeren bundel. Nu waren deze laatste kegels orthogonaal, dus is de asymptotenkegel van onze hyperboloïde het ook; en aangezien de asymptotenkegel van een kwadratisch oppervlak daardoor ontstaat, dat men de beide projectivische vlakkenbundels met elkaar kruisende ribben, die het oppervlak zelf voortbrengen, evenwijdig aan zich zelf verplaatst, totdat hunne ribben door het middelpunt van het oppervlak gaan, en dan op nieuw de snijlijnen van overeenkomstige vlakken construeert, zullen de beide oorspronkelijke bundels eene zoogenaamde orthogonale hyperboloïde voortbrengen (Binet, *Correspond. sur l'école impériale polyt.* II), wanneer de beide verplaatste een orthogonalen kegel doen ontstaan. Alle op de aangeduide wijze ontstane hyperboloïden zijn dus orthogonaal; zij gaan alle door K_∞ en d_y, en hare symmetrievlakken en assen zijn evenwijdig aan die der kegels uit den bundel; de vlakken dus in het bizonder aan het tweede projectievlak, aan H_y en $H_{y'}$.

Denkt men zich alle rechten l, die door een willekeurig punt P in de ruimte gaan, en bovendien alle K_∞ snijden, dus met andere woorden den kegel door P evenwijdig aan de kegels van den bundel, dan vormen de hyperboloïden, die bij deze lijnen l behooren, een bundel van kwadratische oppervlakken; want behalve K_∞ en d_y hebben al deze hyperboloïden nog gemeen den straal g der congruentie, die door P gaat, dus, alles te zamen genomen, eene ontaarde ruimtekromme R^4.

Of kiest men alle lijnen l, die door een willekeurig punt van K_∞ gaan en alle één en denzelfden straal g der congruentie snijden, dan vormen ook de hyperboloïden, die bij deze lijnen behooren, een bundel, om dezelfde reden als zooeven. Zoo is bij voorbeeld bizonder eenvoudig te onderzoeken de bundel van hyperboloïden, behoorende bij alle lij-

l in het tweede projectievlak en evenwijdig aan de z-as; bij de z-as zelf behoort als bizondere hyperboloïde de kegel $y^2 = x z$ van § 9; de middelpunten van alle hyperboloïden liggen op eene rechte lijn door O en in het eerste projectievlak, namelijk juist op de raaklijn O C in O aan de parabool P_1; de symmetrievlakken evenwijdig aan $H_{y'}$ snijden uit de hyperboloïden ellipsen, wier assen zich verhouden als $1 : \sqrt{2}$, en zoo voort.

§ 11. In deze laatste paragraaf eindelijk willen wij nog melding maken van eene andere opvatting van het door ons behandelde vraagstuk, die Prof. Fiedler kort uiteen heeft gezet in een klein opstel in de »*Monatshefte für Mathematik und Physik*" III. *Jahrg. Seite* 193, en waarbij, wel is waar, het elementaire karakter van het vraagstuk verloren gaat, maar die daar tegenover het voordeel bezit, ook andere, met het onze nauw verwante, vraagstukken als het ware gelijktijdig op te lossen.

Het instrument, als het geoorloofd is het zoo te noemen, waarmede men de eerste of horizontale projecties van alle punten en rechten in de ruimte bepaalt, is het stralen- en vlakkennet, waarvan het oneindig verre punt Z_∞ der z-as het toppunt is; het eerste projectievlak zelf, opgevat als het inbegrip van al zijne punten en rechten, is eene normale doorsnede van dat net, waardoor dit laatste zelf tegelijkertijd bepaald wordt. De tweede projectien van alle punten en rechten in de ruimte worden verkregen met behulp van een dergelijk net, maar waarvan het punt Y_∞ het toppunt is.

Wordt het tweede projectievlak in het eerste neergeslagen, dan komt het punt Y_∞ op Z_∞ te liggen; de beide netten hebben dan hetzelfde toppunt. Beschouwt men nu alle rechten in het vlak van teekening als samenvallende eerste en tweede projectien van lijnen in de ruimte, dan worden de beide netten identisch, en dus congruent, en dus ook projectivisch. Wordt dan het tweede projectievlak weer opgericht, dan zijn de beide projecteerende netten wel is waar niet meer identisch, maar daarom toch nog wel congruent. De rechten in de ruimte dus, wier eerste en tweede projectien samenvallen,

kunnen worden opgevat als de snijlijnen der paren van overeenkomstige vlakken uit twee congruente vlakkennetten, wier toppunten Z_∞ en Y_∞ zijn. Maar deze netten zijn, behalve congruent, ook nog perspectivisch; want van alle lijnen, die de x-as loodrecht kruisen of snijden, vallen de beide projecteerende vlakken niet alleen na het neerslaan van het verticale projectievlak, maar ook reeds daarvoor samen; de beide netten hebben dus den bundel van vlakken met de ribbe Z_∞ Y_∞, dat wil zeggen alle vlakken loodrecht op de x-as, overeenkomstig gemeen, en zijn dus perspectivisch. Zij moeten derhalve een perspectiefvlak bezitten, waarop de snijlijnen van alle paren van overeenkomstige vlakken gelegen moeten zijn, en dit is het vlak $H_{x'}$. (§ 1). Daarom dus liggen alle lijnen, wier eerste en tweede projectien samenvallen, in een plat vlak.

Volkomen hetzelfde geldt nu voor de tweede en derde projectien. Hier heeft men twee projecteerende netten met de toppunten Y_∞, X_∞, die ook perspectivisch zijn, omdat zij alle vlakken loodrecht op de z-as overeenkomstig gemeen hebben. Hun perspectiefvlak is $H_{z'}$, en daarin liggen dus alle lijnen, wier tweede en derde projectien samenvallen.

Maar deze redeneering is niet meer juist, waar het de eerste en derde projectien geldt. Wel is waar worden ook hier de beide projecteerende netten, met de toppen Z_∞ en X_∞, na het vereenigen der drie projectievlakken, identisch en dus congruent; maar in hun oorspronkelijken stand zijn zij niet perspectivisch, omdat van lijnen, die de y-as loodrecht kruisen of snijden, de eerste en derde projectien niet samenvallen, maar integendeel loodrecht op elkaar staan. Alleen het oneindig verre vlak der ruimte hebben zij overeenkomstig gemeen, omdat van de lijnen, die daarin liggen, alle projectien, en dus ook de eerste en derde, samenvallen.

Onze stralen g zijn dus de snijlijnen der overeenkomstige vlakken van wel is waar congruente, maar niet perspectivische vlakkennetten; zij liggen dus ook niet in een perspectiefvlak, maar vormen eene congruentie. Daar echter de beide projectivische netten congruent zijn, zijn ook alle overeenkomstige vlakkenbundels en zoo voort der beide net-

ten congruent, en daarin ligt de oorzaak van het verschijnsel, dat alle kegels en hyperboloïden, die wij in den loop onzer beschouwingen ontmoet hebben, orthogonaal waren.

Het voordeel van deze opvatting ligt nu, zooals wij reeds deden opmerken, daarin, dat zij ons ook in staat stelt vraagstukken van anderen, hoewel overeenkomstigen aard, op te lossen. Vraagt men bij voorbeeld naar de lijnen, van welke twee projectien nu niet meer samenvallen, maar symmetrisch liggen ten opzichte van één der assen van projectie, dan leidt het onderzoek tot vlakkennetten, die niet meer rechtstreeks, maar indirect congruent zijn, en die, voor symmetrische eerste en tweede projectien met betrekking tot de x-, en voor symmetrische tweede en derde met betrekking tot de y-as, perspectivisch, voor symmetrische eerste en derde daarentegen algemeen liggen; men vindt de vlakken H_x, H_z en eene nieuwe congruentie. Wij onderzoeken dit vraagstuk echter niet verder.

OVER DE KOORDEN EENER RUIMTEKROMME, DIE DOOR EEN VAST PUNT P GAAN.

DOOR

H. DE VRIES.

Wordt een oppervlak van den m^{en} graad door een ander oppervlak van den graad n gesneden volgens een ruimtekromme van den graad $m.n$, dan vindt men het aantal koorden dezer ruimtekromme, die door een vast punt P gaan, uit de formule

$$h = \tfrac{1}{2}\, m \,.\, n \,.\, (m - 1)\,(n - 1).$$

Van deze stelling vindt men een analytisch bewijs in SALMON-FIEDLER, Analytische Geometrie des Raumes, 3[e] Aufl. Art. 106, Seite 130.

In het hier volgend opstel zullen wij nu trachten dezelfde stelling, benevens eenige andere, die er gemakkelijk uit afgeleid kunnen worden, door meetkundige beschouwingen te verkrijgen; voor wij echter daartoe overgaan, zij het geoorloofd een korte beschrijving te geven van een ander analytisch bewijs dan in het aangehaalde werk te vinden is, ten einde daardoor later in staat gesteld te zijn op een merkwaardige overeenkomst te wijzen, die tusschen dit analytische en het later te geven synthetische bewijs bestaat.

I. Wij gaan uit van twee willekeurige oppervlakken F^m, F^n van de graden m en n, wier vergelijkingen wij in ge-

wone rechthoekige coördinaten symbolisch uitdrukken door $F^m = 0$ en $F^n = 0$, en wij bepalen de koorden der ruimtekromme R^{mn} van den graad $m\,n$, volgens welke deze beide oppervlakken elkaar snijden, die door den oorsprong O der coördinaten gaan. Is P een willekeurig punt der ruimte met de coördinaten x_0, y_0, z_0, dan kan men de verbindingslijn O P analytisch voorstellen door de vergelijkingen

$$x = \lambda\, x_0, \quad y = \lambda\, y_0, \quad z = \lambda\, z_0;$$

en wanneer men deze waarden voor x, y, z in $F^m = 0$, $F^n = 0$ invoert, dan ontstaan er twee vergelijkingen, die in λ van de graden m en n zijn, en die de snijpunten van O P met de gegeven oppervlakken aangeven. Is P in het bijzonder een punt van de ruimtekromme R^{mn}, dan moet aan deze beide laatste vergelijkingen worden voldaan door de waarde $\lambda = 1$, of, wat op hetzelfde neerkomt, de linkerzijden dezer vergelijkingen moeten zonder rest deelbaar zijn door $\lambda - 1$. Heeft men de deeling uitgevoerd, dan blijven er twee vergelijkingen over, die nu in λ nog slechts van de graden $m - 1$ en $n - 1$ zijn; en wanneer O P niet slechts een gewone snijlijn, maar een koorde is van R^{mn}, dan moeten deze beide nieuwe vergelijkingen een gemeenschappelijken wortel hebben. Elimineert men dus λ uit deze vergelijkingen, dan verkrijgt men de voorwaarde, waaraan de coördinaten x_0, y_0, z_0 moeten voldoen, wanneer O P een koorde van R^{mn} zal worden. Deze voorwaarde verkrijgt men in den vorm eener vergelijking, die in x_0, y_0, z_0 van den graad $(m-1)(n-1)$ is, en die derhalve, wanneer men x_0, y_0, z_0 door de veranderlijke coördinaten x, y, z vervangt, een oppervlak $F^{(m-1)(n-1)}$ voorstelt. De snijpunten dus van de drie oppervlakken F^m, F^n, $F^{(m-1)(n-1)}$, wier aantal gelijk is aan $m.n.(m-1)(n-1)$, liggen paarsgewijze op koorden van R^{mn} door P, zoodat het aantal dezer koorden $\frac{1}{2}\, m \,.\, n \,.\, (m - 1)(n - 1)$ bedraagt.

II. Om tot een zuiver synthetisch bewijs van onze stelling te komen, veronderstellen wij, dat m het grootste der beide getallen m en n is; zijn zij in het bijzonder aan elkaar gelijk, dan kan men de hier volgende beschouwingen op elk der beide oppervlakken F^m en F^n, onverschillig op welk,

toepassen. De ruimtekromme R^{mn}, die de doorsnede is der beide oppervlakken, wordt van uit een willekeurig punt P in de ruimte geprojecteerd door een kegel K^{mn} van den graad $m\,n$; en deze kegel snijdt F^n volgens een ruimtekromme van den graad $m\,n^2$. Maar R^{mn} is een gedeelte van deze ruimtekromme, omdat zij zoowel op F^n als op den projecteerenden kegel ligt; de restdoorsnede is dus van den graad $m n^2 - m n = m\,n\,(n - 1)$, en kan voorgesteld worden door het symbool $R^{mn(n-1)}$. Iedere ribbe van den kegel K^{mn} snijdt F^n in n punten; één van deze punten ligt slechts op R^{mn}, en dus liggen de overige $n - 1$ alle op $R^{mn(n-1)}$. Denken wij een ribbe van den kegel, die van de kromme $R^{mn(n-1)}$ n punten bevat, dan moet zij een dubbelribbe zijn, omdat een enkelvoudige ribbe niet meer dan $n - 1$ van die punten kan bevatten; maar een dubbelribbe van den kegel is tevens een koorde van R^{mn}, want de kegel was oorspronkelijk de projecteerende kegel van R^{mn}; in dit geval zijn dus alle n snijpunten der ribbe met F^n punten van $R^{mn(n-1)}$, en twee van die punten tevens punten van R^{mn}, waaruit volgt, dat in het algemeen de snijpunten der beide op F^n gelegen krommen R^{mn} en $R^{mn(n-1)}$ paarsgewijze op de gezochte koorden door P liggen.

Er bestaan echter uitzonderingen op dezen regel: het eerste pooloppervlak P^{n-1} van P ten opzichte van F^n wordt namelijk door R^{mn} gesneden in $m\,.\,n\,.\,(n - 1)$ punten, en wanneer wij een van die punten, dat wij Q_1 willen noemen, met P verbinden, dan is de lijn $P\,Q_1$ een raaklijn van F^n in het punt Q_1. Daar nu Q_1 een punt is van R^{mn} moeten de overige $n - 1$ snijpunten van $P\,Q_1$ met F^n op $R^{mn(n-1)}$ liggen; maar één van die punten, Q_2 bij voorbeeld, valt met Q_1 samen, zoodat Q_1 een snijpunt is van R^{mn} en $R^{mn(n-1)}$, zonder dat daarom echter $P\,Q_1$ een koorde is van R^{mn}; want zij bevat van $R^{mn(n-1)}$ slechts $n - 1$ punten $Q_2, \ldots Q_n$, en is dus geen dubbelribbe van den kegel.

Uit het bovenstaande volgt, dat men, om de koorden van R^{mn} te verkrijgen, die door P gaan, van het volledig aantal snijpunten der beide krommen R^{mn} en $R^{mn(n-1)}$ eerst de $m\,.\,n\,.\,(n - 1)$ punten af moet trekken, die op P^{n-1} liggen;

om dan het overblijvend aantal door twee te deelen. Nu liggen R^{mn} en $R^{mn(n-1)}$ beide op F^{n}, terwijl de eerste bovendien op F^{m} ligt; dus is het volledig aantal snijpunten gelijk aan $m^2 . n . (n-1)$, en dus het aantal koorden h door P
$h = \frac{1}{2} \{m^2 . n . (n-1) - m . n . (n-1\} = \frac{1}{2} m . n . (m-1) . (n-1)$.

Bezit de kromme R^{mn} zelve een zeker aantal dubbelpunten D, dan kunnen de verbindingslijnen van P met deze punten D als koorden van R^{mn} worden beschouwd; maar deze bijzondere koorden zijn niet in het zooeven gevonden aantal h begrepen. Inderdaad, hoewel het punt D een dubbelpunt is van R^{mn}, is het toch slechts een gewoon punt zoowel van F^{m} als van F^{n}; de lijn P D snijdt dus F^{n} behalve in D nog in $n-1$ andere punten, en deze laatste behooren tot $R^{mn(n-1)}$, maar D zelf niet; waaruit volgt dat het aantal snijpunten van R^{mn} en $R^{mn(n-1)}$ door de punten D niet vermindert, en dus ook h onveranderd blijft. Zoo bezit bij voorbeeld een ruimtekromme R^4 van de eerste soort twee koorden, die door P gaan; heeft de kromme een dubbelpunt D, dan is P D eenvoudig een derde koorde, maar de twee eerste blijven bestaan.

III. Wij hebben nu echter in het zooeven gegeven bewijs het oppervlak $F^{(m-1)(n-1)}$ van den graad $(m-1)(n-1)$ nog niet ontmoet, door middel waarvan wij in het analytische bewijs sub I het getal h bepaald hebben; wij willen dus nu onderzoeken, welk verband er bestaat tusschen dit oppervlak en de figuur, die wij in II behandeld hebben. Daarbij maken wij gebruik van de volgende bekende eigenschappen van een stelsel van punten op een rechte lijn: zijn op een rechte lijn door een vast punt P n punten A_1, A_2, ... A_n gegeven door een vergelijking van den n^{en} graad

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

waarbij P de oorsprong der coördinaten is, en vervangt men in deze vergelijking x door $\frac{1}{z}$, waardoor zij overgaat in

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

dan stelt de eerste afleiding van de linkerzijde dezer vergelijking volgens z, gelijk 0 gezet, dus

$$a_1 + 2 a_2 z + 3 a_3 z^2 + \ldots + n . a_n . z^{n-1} = 0 \quad \ldots \quad 2)$$

de $n-1$ harmonische middelpunten M_1, $M_2, \dots M_{n-1}$ van het stelsel $A_1, \dots A_n$ met betrekking tot den pool P voor [1]).

Zijn dus de n-punten A_1, $A_2, \dots A_n$ en de pool P gegeven, dan zijn ook de harmonische middelpunten M_1, $M_2, \dots M_{n-1}$ bepaald; zijn echter omgekeerd de punten M en de pool P gegeven, dan zijn daardoor alleen de oorspronkelijke punten A nog niet bepaald; want wanneer men de linkerzijde der laatste vergelijking volgens z integreert, en de uitkomst $=0$ zet, vindt men

$$C + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0,$$

waarin C een geheel willekeurig standvastig getal voorstelt, dat dus oneindig veel verschillende waarden kan hebben. Deze vergelijking stelt dus ook oneindig veel stelsels van punten A voor, die echter alle met betrekking tot P als pool dezelfde harmonische middelpunten $M_1, \dots M_{n-1}$ van den graad $n-1$ hebben. Geeft men echter een van de punten A, bij voorbeeld A_1, door zijn abscis $x_1 = \frac{1}{z_1}$, dan zijn daardoor ook de punten $A_2, \dots A_n$ bepaald; want door de waarde $z_1 = \frac{1}{x_1}$ in de bovenstaande vergelijking in te voeren, vindt men een vergelijking ter berekening van C, en wanneer C bekend is, bij voorbeeld $= a_0$, dan stelt de vergelijking

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0,$$

slechts één volkomen bepaald puntenstelsel $A_1, \dots A_n$ voor.

IV. Van deze eigenschappen maken wij nu op de volgende wijze bij de in II beschreven figuur gebruik: de lijn, die P verbindt met een willekeurig punt A_1 van F^n, snijdt het eerste pooloppervlak P^{n-1} van P met betrekking tot F^n in $n-1$ punten M_1, M_2, ... M_{n-1}. Bepalen wij nu de punten A_2, $A_3, \dots A_n$ zoodanig, dat zij met A_1 een stelsel van n punten vormen, waarvoor de punten $M_1, \dots M_{n-1}$ de harmonische middelpunten van den $(n-1)^{en}$ graad zijn met

1) Cremona-Curtze. Einleitung in eine geom. Theor. d. ebenen Curven. § 3. Seite 15.

betrekking tot het punt P als pool, en laten wij het punt A_1 het geheele oppervlak F^m doorloopen, dan zullen de punten $A_2, \dots A_n$ eveneens een zeker oppervlak doorloopen, dat, zooals gemakkelijk is in te zien, van den graad $m(n-1)$ moet zijn. Want iedere rechte door P snijdt F^m in m, en dus het nieuwe oppervlak in $m(n-1)$ punten, waaruit volgt dat dit laatste een $F^{m(n-1)}$ van den graad $m(n-1)$ is.

Ligt A_1 in het bijzonder op de ruimtekromme R^{mn}, dus behalve op F^m ook nog op F^n, dan liggen ook de punten $A_2, \dots A_n$ van $F^{m(n-1)}$ op F^n, of, wat hetzelfde is, op de kromme $R^{mn(n-1)}$, want P^{n-1} is het eerste poolopperviak van P juist ten opzichte van F^n; hieruit volgt dus, dat $F^{m(n-1)}$ door de geheele kromme $R^{mn(n-1)}$ heengaat, of met andere woorden, dat deze kromme de volledige doorsnede is van $F^{m(n-1)}$ met F^n.

Wij onderzoeken nu verder de doorsnede van $F^{m(n-1)}$ met F^m. Het oppervlak F^m snijdt het poolopperviak P^{n-1} volgens een ruimtekromme van den graad $m(n-1)$. Is A_1 een willekeurig punt dezer kromme, dan valt het met een der punten $M_1, \dots M_{n-1}$ samen; zijn reciproke abscis $z_1 = \frac{1}{x_1}$ voldoet dus aan de vergelijkingen 1) en 2) van III tegelijkertijd; maar 2) is juist de voorwaarde, dat 1) twee gelijke wortels heeft, dus moet één van de punten $A_2, \dots A_n$, bij voorbeeld A_2, met A_1 samenvallen; waaruit volgt, aangezien A_1 op F^m en A_2 op $F^{m(n-1)}$ moet liggen, dat de volledige doorsnede van F^m met P^{n-1} tevens op $F^{m(n-1)}$ gelegen is. Maar de volledige doorsnee van F^m met $F^{m(n-1)}$ is van den graad $m^2(n-1)$; een gedeelte daarvan, van den graad $m(n-1)$, ligt op een oppervlak P^{n-1}; dus zal het in het algemeen mogelijk zijn door het overblijvend gedeelte van den graad $m^2(n-1) - m(n-1) = m(m-1)(n-1)$ een oppervlak $F^{(m-1)(n-1)}$ van den graad $(m-1)(n-1)$ te brengen. Ook bestaat er nooit meer dan één zoodanig oppervlak; want $F^{(m-1)(n-1)}$ en P^{n-1} tezamen genomen gelden voor een oppervak van den graad $m(n-1)$, dat met $F^{m(n-1)}$ een bundel van oppervlakken van den graad $m(n-1)$ bepaalt; aangezien er nu slechts één oppervlak P^{n-1} mo-

gelijk is, dat door het gedeelte der basiskromme gaat, dat van den graad $m(n-1)$ is [want waren er twee denkbaar, dan zouden zij elkaar, aangezien $m > n$ en dus ook $m > n-1$ is, moeten snijden volgens een kromme van den graad $m(n-1) > (n-1)^2$], zoo is er ook slechts één oppervlak $F^{(m-1)(n-1)}$ door het overblijvend gedeelte mogelijk.

Om nu de koorden van R^{mn} te vinden, die door P gaan, is het noodig (II) de snijpunten te bepalen van R^{mn} en $R^{mn(n-1)}$; volgens het bovenstaande zijn deze punten identisch met de snijpunten der drie oppervlakken F^m, $F^{m(n-1)}$, F^n, of ook, daar men door de doorsnee der beide eerstgenoemde oppervlakken de nieuwe oppervlakken P^{n-1} en $F^{(m-1)(n-1)}$ brengen kan, identisch met de snijpunten van R^{mn} met deze beide oppervlakken. De snijpunten met P^{n-1} zijn, zooals wij reeds weten (II), voor ons vraagstuk van geen belang; die met $F^{(m-1)(n-1)}$ daarentegen liggen alle paarsgewijze op koorden door P.

V. Passen wij nu de in IV verkregen uitkomst toe op de beide eenvoudigste gevallen, die hier mogelijk zijn, namelijk op de doorsnede van twee kwadratische oppervlakken en op die van een kwadratisch en een kubisch oppervlak.

Worden de beide gegeven kwadratische oppervlakken voorgesteld door F_1^2 en F_2^2, en construeeren wij van P het poolvlak P_1 ten opzichte van F_1^2, dan zal, wanneer het punt A_1 het oppervlak F_2^2 doorloopt, het vierde harmonische punt A_2 van A_1 ten opzichte van P en het snijpunt M_1 van P A_1 met P_1 eveneens een kwadratisch oppervlak $F_2'^2$ doorloopen [$m(n-1) = 2$], en, wat in het algemeene geval niet plaats vindt, F_2^2 zal omgekeerd uit $F_2'^2$ door dezelfde constructie gevonden kunnen worden, als waardoor wij zooeven het laatste uit het eerste vonden.

F_2^2 en $F_2'^2$ hebben een vlakke doorsnee gemeen, die in P_1 ligt; zij snijden elkaar dus nog volgens een tweede kegelsnee, waarvan het vlak [$F^{(m-1)(n-1)}$ wordt hier een plat vlak] door P gaat. Want verbinden wij P met een punt A_1 dezer kegelsnee, dan is, volgens het zoo even over de involutorische ligging der beide oppervlakken F_2^2 en $F_2'^2$ aan-

gehaalde, ook het bij A_1 behoorende punt A_2 een punt der kegelsnee. Dit vlak nu snijdt de ruimtekromme R^4, die de doorsnede is van F_1^2 en F_2^2, in vier punten A, B, C, D, die paarsgewijze op de beide door P gaande koorden P A B, P C D liggen. En aangezien deze punten A, B, C, D op beide kwadratische oppervlakken tegelijk liggen, zijn de vierde harmonische punten van P ten opzichte van A, B en C, D zoowel punten van het poolvlak P_1 als van P_2, waaruit dus de bekende regel volgt, dat de beide door P gaande koorden van R^4 in het vlak liggen dat P verbindt met de snijlijn der poolvlakken van P ten opzichte van de gegeven kwadratische oppervlakken.

Is een der beide oppervlakken F^3 van den derden graad, en het andere F^2 van den tweeden, dan construeeren wij eerst het poolvlak P^1 van P ten opzichte van F^2, verbinden daarna P met een willekeurig punt A_1 van F^3, en construeeren dan weer het vierde harmonische A_2 van A_1 ten opzichte van P en M_1. Doorloopt dan A_1 het oppervlak F^3, dan doorloopt A_2 een nieuw oppervlak F'^3, eveneens van den derden graad, dat weer met F^3 involutorisch ligt ten opzichte van P en P^1, en deze involutorische betrekking van afhankelijkheid zal voor ieder m bestaan, wanneer slechts $n = 2$ is. F^3 en F'^3 hebben nu een vlakke doorsnee gemeen, die in P^1 ligt en van den derden graad is; hun restdoorsnede is dus van den zesden graad en ligt op een F_1^2, $[F^{(m-1)(n-1)} = F_1^2]$; dit laatste snijdt de doorsnede R^6 van F^3 en F^2 in twaalf punten, die paarsgewijze op zes koorden door P liggen.

Deze zes koorden nu zijn niet geheel van elkaar onafhankelijk. Want aangezien R^6 op F^2 ligt en dit oppervlak door F_1^2 volgens een ruimtekromme van den vierden graad R^4 gesneden wordt, liggen de twaalf punten van R^6, die op de zes door P gaande koorden liggen, tevens op R^4; waaruit volgt, dat die zes koorden van R^6 tevens koorden van R^4 moeten zijn; maar dan moet R^4 noodzakelijk van uit P door een dubbel projecteerenden kwadratischen kegel geprojecteerd worden, waarmede de volgende stelling bewezen is:

S n ij d e n e e n k u b i s c h e n e e n k w a d r a t i s c h o p p e r v l a k e l k a a r v o l g e n s e e n r u i m t e k r o m m e R^6, d a n

gaan door ieder punt P in de ruimte zes koorden dezer ruimtekromme, die steeds op een kegel van den tweeden graad liggen.

De projectie van R^6 op een plat vlak van uit het punt P als centrum heeft dus zes schijnbare dubbelpunten, die op een kegelsnee liggen; het aantal werkelijke dubbelpunten van R^6 kan dus in geen geval grooter zijn dan vier.

VI. Men kan nu ten slotte vragen, of ook in het algemeene geval de $\frac{1}{2} m \,.\, n \,.\, (m-1)(n-1)$ koorden van $R^{m n}$ die door P gaan, niet steeds op een kegel moeten liggen, die door een aantal ribben bepaald is, dat kleiner is dan het aantal h der koorden. Dit zal dan het geval zijn, wanneer de doorsnede van het oppervlak $F^{(m-1)(n-1)}$ met F^n van lageren graad is dan die van F^m en F^n, dus dan, wanneer $(m-1)(n-1) < m$ is, een ongelijkheid, die men ook zoo schrijven kan

$$m(n-2) < n-1,$$

of

$$m < \frac{n-1}{n-2}.$$

Is $n = 2$, dan is m steeds kleiner dan $\frac{n-1}{n-2}$; is echter $n \overline{\gtrless} 3$, dan kan m hoogstens $= 1$ zijn, een onderstelling die voor de theorie der koorden eener ruimtekromme geen waarde heeft. Alleen het geval $n = 2$ en m willekeurig is dus van belang. In dit geval is $F^{m(n-1)} = F'^{m}$, en F^m en F'^m hebben een vlakke doorsnede in P^1 gemeen; de restdoorsnede is dus van den graad $m(m-1)$, en door deze kromme gaat het oppervlak $F^{(m-1)(n-1)} = F^{m-1}$. Dit oppervlak snijdt F^2 volgens een ruimtekromme van den graad $2(m-1)$, en voor deze zijn de $\frac{1}{2} m \,.\, n \,.\, (m-1)(n-1) = m(m-1)$ koorden van de doorsnede R^{2m} van F^m en F^2 door P eveneens koorden, zoodat al deze koorden op den kegel van den graad $m-1$ moeten liggen, die van uit P als centrum de kromme van den graad $2(m-1)$ dubbel projecteert. Wij vinden dus

de volgende algemeene uitkomst, waarvan de stelling in V een bijzonder geval uitmaakt:

Wordt een oppervlak van den m^{en} graad F^m door een kwadratisch oppervlak F^2 volgens een ruimtekromme R^{2m} van den graad $2m$ gesneden, dan gaan door ieder punt P der ruimte $m(m-1)$ koorden dezer kromme; en deze koorden liggen steeds op een kegel van den graad $m-1$.

HET AFLEIDEN VAN DE ALGEBRAÏSCHE VERGELIJKINGEN VAN DE DERDE-MACHTS-REGEL-VLAKKEN, OP ELEMENTAIRE WIJZE,

DOOR

A. N. GODEFROY.

Daartoe wordt in het $X\,Y$-vlak verondersteld te zijn beschreven, 1°. Eene kegelsnede en 2°. Eene derde-machts kromme lijn met knoop (respectievelijk keerpunt), beiden te beschouwen als *richtlijn.*

1°. § 1. De kegelsnede in het $X\,Y$-vlak gaat door den *oorsprong*, zoodat de vergelijking in onderling rechthoekige Cartesiaansche coördinaten wordt voorgesteld door

$$y^2 - a\,x\,y + b\,x^2 - c\,y + d\,x = 0.$$

De Z-as wordt verondersteld de lijn te zijn, waarop de beschrijvende lijnen van het regelvlak te zamen komen op eene veranderlijke hoogte, die voorgesteld wordt door

$$z = f(x, y).$$

Beweegt de beschrijvende lijn zich langs den omtrek der kegelsnede, en worden de coördinaten van het *regelvlak* voorgesteld door X, Y en Z, dan is (fig. 1)

$$Z : f(x, y) = y - Y : y = x - X : x,$$

zoodat de vergelijking van het regelvlak wordt

$$Z = \frac{x - X}{x} f(x, y) = \frac{y - Y}{y} f(x, y) \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

De kegelsnede behoort tot het oppervlak.

§ 2. Nemen wij in het XY-vlak eene *rechte lijn*, die van de X en Y assen respectievelijk afsnijdt de lengten A en B, en leiden wij de beschrijvende lijn langs deze rechte lijn, met behoud van de hoogte op de Z-as ($z = f(x, y)$ uit de kegelsnede afgeleid) dan behoort de kegelsnede niet tot het oppervlak. Als p en q de coördinaten zijn van het snijpunt van het vlak der beschrijvende lijn met de gegeven rechte (A, B) dan is

$$p = \frac{ABX}{AY + BX} \text{ en } q = \frac{ABY}{AY + BX},$$

(waarin X en Y kunnen vervangen worden door x en y, uithoofde van $x : y = X : Y$).

Voorts is dan

$$Z : f(x, y) = p - X : p \text{ of } = q - Y : q$$

waaruit volgt

$$Z = \frac{p - X}{p} f(x, y) = \frac{q - Y}{q} f(x, y) \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

Door substitutie der waarden van p en q verkrijgt men de vergelijking in X en Y.

Aanmerking. Voor $B = \infty$ loopt de lijn AB evenwijdig aan de Y-as; voor $A = \infty$ loopt zij evenwijdig aan de X-as.

§ 3. Zet men de waarde van $f(x, y)$ loodrecht op den straal Oy in het punt (x, y) van de kegelsnede (fig. 2), en laat de beschrijvende lijn tevens gaan door het snijpunt (p, q) met de rechte lijn A B, dan wordt

$$Z : f(x, y) = p - X : p - x \text{ of } = q - Y : q - y,$$

waardoor dus

$$Z = \frac{p - X}{p - x} f(x, y) = \frac{q - Y}{q - y} f(x, y), \; . \; . \; . \; . \; . \; (C)$$

waarin voor p en q de waarden in X en Y moeten gesubstitueerd worden, hierboven gevonden.

De hoogte h, waar de beschrijvende lijn de Z-as snijdt, wordt bepaald door

$$p - x : p = f(x, y) : h,$$

of door

$$q - y : q = f(x, y) : h,$$

waaruit

$$h = \frac{p}{p-x} f(x,y) = \frac{q}{q-y} f(x,y).$$

De rechte lijn A B kan de kegelsnede snijden, raken of er buiten liggen, hetgeen op de gedaante van het regelvlak van invloed is.

§ 4. Zet men daarentegen de lengte $z = f(x, y)$ uit op eene loodlijn (fig. 2ª), opgericht in het snijpunt (p, q) met de rechte lijn (A B) en, laat de beschrijvende lijn gaan door het punt (x, y) der kegelsnede, dan is

$$Z : f(x,y) = X - x : p - x,$$

of ook

$$Z : f(x,y) = Y - y : q - y,$$

waaruit

$$Z = \frac{X-x}{p-x} f(x,y) = \frac{Y-y}{q-y} f(x,y) \quad \ldots\ldots \quad \text{(D)}$$

De hoogte h op de Z-as wordt bepaald door

$$p - x : f(x,y) = x : h,$$

of door

$$q - y : f(x,y) = y : h,$$

waaruit

$$h = \frac{x}{p-x} f(x,y) = \frac{y}{q-y} f(x,y).$$

§ 5. Nemen wij in het $X\,Y$-vlak twee rechte lijnen aan, die (respectievelijk) van de X en Y-as de lengten (A, B) en (C, D) afsnijden, dan worden de coördinaten (p, q) en (r, s) van de snijpunten dezer lijnen, met eene lijn gaande door den oorsprong,

$$p = \frac{ABX}{AY + BX}, \quad q = \frac{ABY}{AY + BX},$$

$$r = \frac{CDX}{CY + DX} \text{ en } s = \frac{CDY}{CY + DX}.$$

Zijn de lijnen A B en C D onderling evenwijdig, dan is

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Is $\frac{A}{C} = \infty$, dan loopt de lijn evenwijdig aan de Y-as.

Is $\frac{B}{D} = \infty$, dan loopt de lijn evenwijdig aan de X-as.

Is $\frac{B}{A} = \frac{C}{D}$ dan staan de lijnen rechthoekig op elkander.

Stelt men nu de lengte $z = f(x, y)$ loodrecht op het snijpunt (r, s) van de lijn (C D) en laat de beschrijvende lijn tevens gaan door het punt (p, q) van de lijn (A B), dan wordt

$$Z : f(x, y) = X - p : r - p = Y - q : s - q,$$

waaruit

$$Z = \frac{X - p}{r - p} f(x, y) = \frac{Y - q}{s - q} f(x, y) \quad \ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

Hierin stelt $f(x, y) = z$, de lengte voor, afgeleid uit de kegelsnede, die ook hier niet tot het oppervlak behoort.

De hoogte h, waarop de Z-as door de beschrijvende lijn gesneden wordt, volgt uit

$$h : p = f(x, y) : r - p,$$

waaruit

$$h = \frac{p}{r - p} f(x, y) \text{ of ook} = \frac{q}{s - q} f(x, y).$$

Door verwisseling van de lijnen A B en C D vindt men

$$Z : f(x, y) = r - X : r - p = s - Y : s - q,$$

waaruit

$$Z = \frac{r - X}{r - p} f(x, y) \text{ of ook } \frac{s - Y}{s - q} f(x, y).$$

Voor de hoogte h heeft men

$$h : r = f(x, y) : r - p,$$

waaruit

$$h = \frac{r}{r - p} f(x, y), \text{ of ook } h = \frac{s}{s - q} f(x, y).$$

Voor p, q, r, s, substitueert men de bovengevonden waarden in A, B, C, D, X en Y uitgedrukt.

§ 6. Is de vergelijking van de kegelsnede, gaande door den oorsprong,

$$y^2 - a x y + b x^2 - c y + d x = 0,$$

dan moeten x en y uitgedrukt worden in X en Y; daartoe hebben wij

$$x : y = X : Y \text{ of } \frac{x}{y} = \frac{X}{Y} \ldots\ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

Deelen wij de vergelijking der kegelsnede door xy, dan verkrijgt men

$$\frac{y}{x} - a + \frac{bx}{y} - \frac{c}{x} + \frac{d}{y} = 0,$$

of wel volgens (F)

$$\frac{Y}{X} - a + \frac{bX}{Y} - \frac{c}{x} + \frac{dX}{xY} = 0,$$

en met xXY vermenigvuldigende

$$Y^2 x - axXY + bxX^2 = cXY - dX^2,$$

waaruit volgt

$$x = \frac{(cY - dX)X}{Y^2 - aXY + bX^2} \text{ en } y = \frac{(cY - dX)Y}{Y^2 - aXY + bX^2}.$$

Wanneer daarenboven de kegelsnede in den oorsprong door de Y-as wordt geraakt, dan wordt $c = 0$, zoodat alsdan

$$x = -\frac{dX^2}{Y^2 - aXY + bX^2} \text{ en } y = -\frac{dXY}{Y^2 - aXY + bX^2},$$

zijn zal.

Als bijzondere gevallen hebben wij voor den cirkel $y^2 = x(2r - x)$

$$x = \frac{2rX^2}{X^2 + Y^2}, \quad y = \frac{2rXY}{X^2 + Y^2}.$$

Voor de gelijkzijdige hyperbool $y^2 = x(x - 2r)$

$$x = \frac{2rX^2}{X^2 - Y^2}, \quad y = \frac{2rXY}{X^2 - Y^2}.$$

Voor de parabool $y^2 = px$

$$x = \frac{pX^2}{Y^2}, \quad y = \frac{pX}{Y}.$$

Voor den cirkel

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2;$$

voor het geval, dat

$$m^2 + n^2 = r^2$$

is, komt

$$x(x - 2m) + y(y - 2n) = 0,$$

dus

$$x = \frac{2X(mX + nY)}{X^2 + Y^2}, \text{ en } y = \frac{2Y(mX + nY)}{X^2 + Y^2}.$$

Verdere toepassingen worden deu lezer overgelaten.

§ 7. Er blijft nu nog over te bepalen, welke waarde aan $f(x,y)$ kan worden toegekend. Daartoe komen in aanmerking $f(x,y)=x$, $f(x,y)=y$, $f(x,y)=x\pm y$, $f(x,y)=mx$, $f(x,y)=ny$, $f(x,y)=mx\pm ny$.

Wanneer deze waarden worden toegepast op het eerst behandelde geval (vergelijk (A) bladzijde 137 hiervoreu), dan ziet men gemakkelijk in, dat de alsdan ontstaande oppervlakken behooren tot de *conoïden*, waarvan de beschrijvende lijnen zijn gelegen in onderling evenwijdige vlakken.

Voor $f(x,y)=x$ (zijnde de hoogte op de Z-as) zijn de doorgangen der vlakken in het XY-vlak evenwijdig aan de Y-as, terwijl de doorgangen in het XZ-vlak, hoeken van 45° maken met de XY- en de ZY-vlakken.

Voor $f(x,y)=y$ zijn de doorgangen in het XY-vlak evenwijdig aan de X-as, terwijl de doorgangen in het YZ-vlak hoeken van 45° maken met de XY- en de XZ-vlakken.

Voor $f(x,y)=x\pm y$, zullen de doorgangen in het XY-vlak hoeken van 45° maken met de X- en de Y-assen, en evenzoo met de Z-as in het XZ-vlak.

Voor $f(x,y)=mx$, zal de doorgang in het XY-vlak evenwijdig zijn aan de Y-as; in het XZ-vlak daarentegen zal de doorgang met de X-as een hoek maken, waarvan de tangens $=m$ zijn zal. De waarde van m kan dus naar welgevallen ieder getal voorstellen, begrepen tusschen 0 en ∞.

Voor $f(x,y)=ny$, zal de doorgang in het XY-vlak evenwijdig zijn aan de X-as; in het YZ-vlak zal de doorgang met de Y-as een hoek maken, waarvan de tangens $=n$ zijn zal.

Voor $f(x,y)=mx\pm ny=m\left(x\pm\frac{n}{m}y\right)$, zal de doorgang in het XY-vlak een hoek maken met de X-as, waarvan de tangens wordt voorgesteld door $\frac{m}{n}$; terwijl de doorgang in het XZ-vlak een hoek zal maken met de X-as voorgesteld door m.

Neemt men daarentegen $f(x,y)=P\pm x$, $P\pm y$, en zoo voort, waarin P eene standvastige lengte voorstelt, dan

zal het oppervlak niet tot de conoïden behooren, dewijl alsdan de vlakken der beschrijvende lijnen niet meer evenwijdig zijn, waartoe vereischt wordt dat $P = 0$ zij. Voor iedere lengte P, van 0 verschillend, zullen de doorgangen in het XZ-vlak eene *parabool* omhullen, waarvan de parameter van de waarde van P zal afhangen.

$$\pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = \pm \sqrt{p}.$$

Nemen wij $f(x,y) = \frac{Py}{x}$, dan zal, wanneer de Y-as tevens raaklijn is aan de kegelsnede in den oorsprong, het oppervlak behooren tot de Cayley-oppervlakken, alwaar de beschrijvende lijn samenvalt met de Z-as, of de dubbellijn.

Voor $f(x,y) = \frac{Px}{y}$ zal dit mede het geval zijn, als de X-as raaklijn is aan de kegelsnede in den oorsprong.

Men zal ook kunnen aannemen $f(x,y) = P\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = P\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)$, doch uit de einduitkomst zal moeten blijken, of het regelvlak van den derden of van hoogeren graad zijn zal.

§ 8. Alvorens tot de derde-machts kromme als richtlijn in het XY-vlak over te gaan, wenschen wij ter toelichting een paar eenvoudige gevallen van de *conoïden* te behandelen.

Stel de richtlijn een *cirkel*

$$y^2 = x(2r - x),$$

dan is

$$x : y = X : Y,$$

dus ook

$$x^2 : y^2 = X^2 : Y^2 \quad \text{of} \quad x : 2r - x = X^2 : Y^2,$$

waaruit

$$x = \frac{2rX^2}{X^2 + Y^2} \quad \text{en} \quad y = \frac{2rXY}{X^2 + Y^2}.$$

Stel nu

$$f(x,y) = x,$$

dan wordt

$$Z = \frac{x - X}{x} f(x,y) = x - X;$$

derhalve

$$Z(X^2 + Y^2) = 2\,r\,X^2 - X(X^2 + Y^2),$$

de vergelijking van het regelvlak.

Voor Z standvastig $= r$, is de doorsnede eene strophoïde.

Voor $Z = \frac{1}{2}\,r$, is de doorsnede eene trisectrix.

Voor $Z = 2\,r$, is de doorsnede eene cissoïde, en zoo voort.

De doorsnijding met de Z-as is eene knoop, een keerpunt of een afgezonderd punt.

Stelt men

$$f(x, y) = y,$$

dan is

$$Z = \frac{y - Y}{y} f(x, y) = y - Y,$$

of na substitutie en herleiding

$$Z(X^2 + Y^2) = 2\,r\,X\,Y - Y(X^2 + Y^2),$$

zijnde eene cylindroide.

Stelt men Z standvastig $= -a$ en kleiner dan r, dan wordt

$$(Y - a)(X^2 + Y^2) = 2\,r\,X\,Y,$$

zijnde eene kromme met een knoop en een buigpunt, die uit den cirkel door Mac Laurinsche transformatie is te construeren. Voor $a = r$ gaat de knoop over in een keerpunt; voor $a > r$ in een stelsel van twee buigpunten. (Zie fig. 3).

Stelt men (zie fig. 5)

$$f(x, y) = \frac{2\,r\,y}{x} = \frac{2\,r\,Y}{X},$$

dan wordt

$$Z = \frac{y - Y}{y} \cdot \frac{2\,r\,y}{x} \text{ of } Z\,x = 2\,r\,(y - Y),$$

en behoort niet tot de conoïden.

Hierin de waarden van x en y substitueerende, komt

$$2\,r\,Z\,X^2 = 2\,r\,[2\,r\,X\,Y - Y(X^2 + Y^2)],$$

of

$$Z\,X^2 = [2\,r\,X - (X^2 + Y^2)]\,Y,$$

een derde-machts oppervlak van Cayley, met een cirkel als richtlijn.

Past men deze transformatie toe op de *hyperbool*

$$y^2 = x\,(x - 2\,r),$$

dan is

$$y=\frac{2\,r\,X\,Y}{X^2-Y^2} \text{ en } x=\frac{2\,r\,X^2}{X^2-Y^2},$$

zoodat

$$Z\,x=2\,r\,(y-Y),$$

overgaat in

$$Z\,X^2=[2\,r\,X-(X^2-Y^2)]\,Y,$$

een CAYLEY-oppervlak met een gelijkzijdige hyperbool als richtlijn. Stelt men hierin $Z=\pm 2\,r$, dan verkrijgen wij voor de vergelijking der doorsnede, evenwijdig aan het $X\,Y$-vlak,

$$\pm 2\,r\,X^2=2\,r\,X\,Y-X^2\,Y+Y^3,$$

of wel

$$\pm 2\,r\,X\,(X-Y)+Y\,(X^2-Y^2)=0.$$

Deze vergelijking, gedeeld door $X-Y$, geeft

$$\pm 2\,r\,X+Y\,(X+Y)=0.$$

Door $X-Y=0$ worden de asymptoten voorgesteld; de tweede vergelijking is die van eene hyperbool op scheeve assen

$$Y=-\tfrac{1}{2}\,X\pm\sqrt{X\,(\tfrac{1}{4}\,X-2\,r)},$$

Passen wij $f\,(x,y)=\frac{p\,y}{x}$ toe op de parabool $y^2=p\,x$, dan is

$$x=\frac{p\,X^2}{Y^2} \text{ en } y=\frac{p\,X}{Y}.$$

Hierdoor wordt

$$Z\,x=(y-Y)\,p,$$

na substitutie en herleiding

$$Z\,X^2=p\,X\,Y-Y^3 \text{ of } Y^3+X\,(Z\,X-p\,Y)=0,$$

zijnde juist de formule door CAYLEY gegeven in de Phil. Transact. 1863, page 241. Hier is dus de *parabool* de *richtlijn.*

Men ziet gemakkelijk in, dat de X-as tot het oppervlak behoort.

Platte vlakken door die as hebben tot vergelijking $Z=m\,Y$, waarin $m=$ tangens van den hoek, dien het snijvlak met het $X\,Y$-vlak maakt. Na substitutie dezer waarde vinden wij

$$m\,Y\,X^2=Y\,(p\,X-Y^2) \text{ of } m\,X^2=p\,X-Y^2$$

zijnde de vergelijking van eene *ellips*, die voor $m=1$ ($tg\, 45°$) overgaat in een cirkel $Y^2 = X(p - X)$, als projectie der doorsnede, die dus zelve eene *ellips* zijn zal.

Stelt men daarentegen

$$f(x, y) = \frac{p\,x}{y},$$

dan wordt

$$Z = \frac{x - X}{x} \cdot \frac{p\,x}{y} \text{ of } Z\,y = p\,(x - X).$$

Na substitutie wordt dit

$$Y\,Z = p\,X - Y^2,$$

dus een tweede-machts oppervlak.

Stelt men daarentegen

$$f(x, y) = p + \frac{p\,y}{x} = p\,\frac{(x+y)}{x},$$

dan wordt

$$Z\,y^2 = p\,(y - Y)\,(x+y),$$

en na substitutie

$$X\,Y\,Z = (X+Y)\,(p\,X - Y^2),$$

een derde-machts regelvlak.

Bij de Cayley-oppervlakken is het eene voorwaarde, dat eene beschrijvende lijn met de Z-as (dubbellijn van de regelvlakken in het algemeen) samenvalt. Daartoe is het bij de kegelsneden als richtlijn in het $X\,Y$-vlak noodzakelijk, dat de Y-as *raaklijn* zij aan de kegelsnede in den oorsprong.

De vergelijking in het algemeen is dan,

$$y^2 - a\,x\,y + b\,x^2 + d\,x = 0,$$

en alsdan is (blz. 141)

$$x = -\frac{d\,X^2}{Y^2 - a\,X\,Y + b\,X^2} \text{ en } y = -\frac{d\,X\,Y}{Y^2 - a\,X\,Y + b\,X^2}.$$

Voor het Cayley-oppervlak is

$$f(x, y) = \frac{d\,y}{x},$$

zoodat

$$Z = \frac{y - Y}{y}\,d\,\frac{y}{x} = \frac{(y - Y)\,d}{x}$$

wordt, of

$$Zx = d(y - Y);$$

alzoo na substitutie en herleiding

$$ZX^2 = Y(dX + Y^2 - aXY + bX^2),$$

een derde-machts CAYLEY-regelvlak.

Was de Y-as geen raaklijn, en dus de vergelijking der kegelsnede

$$y^2 - axy + bx^2 - cy + dx = 0,$$

dan zou de beschrijvende lijn niet met de Z-as samenvallen, maar in het snijpunt met de Y-as, waarvan de ordinaat $= c$ is. De vergelijking van het oppervlak wordt dan (blz. 141)

$$ZX(cY - dX) = d(cY - dX - Y^2 + aXY - bX^2)Y;$$

daar nu a en b getallen zijn, en c en d lijnen voorstellen, zoo is het oppervlak toch van den derden graad, dewijl ook kan geschreven worden

$$ZX\left(\frac{c}{d}Y - X\right) = (cY - dX - Y^2 + aXY - bX^2)Y.$$

Voor $X = 0$, wordt $Y = 0$ of $Y = c$; zooals boven is aangemerkt.

Als toepassing van de onderstelling in § 2 nemen wij eene rechte lijn evenwijdig aan de Y-as op den afstand $2r$. Als kegelsnede een cirkel, waarvan de vergelijking is

$$y^2 = x(2r - x).$$

Nemen wij de hoogte $f(x, y)_\mathrm{s}$ op de Z-as $= x$, dan is de vergelijking van het oppervlak

$$Z = \frac{2r - X}{2r} f(x, y) = \frac{2r - X}{2r} x,$$

dus

$$2rZ = (2r - X)x.$$

Voor den cirkel is

$$x = \frac{2rX^2}{X^2 + Y^2},$$

zoodat na substitutie

$$2rZ(X^2 + Y^2) = (2r - X)2rX^2,$$

of

$$Z(X^2 + Y^2) = (2r - X)X^2,$$

een regelvlak van den derden graad.

Voor

$$f(x, y) = y = \frac{2\,r\,X\,Y}{X^2 + Y^2},$$

wordt

$$Z = \frac{2\,r - X}{2\,r}\,y,$$

of na substitutie en herleiding

$$Z\,(X^2 + Y^2) = (2\,r - X)\,X\,Y,$$

mede een regelvlak van den derden graad.

Voor

$$f(x, y) = \frac{2\,r\,y}{x},$$

wordt

$$2\,r\,Z\,x = (2\,r - X)\,2\,r\,y \quad \text{of} \quad Z\,x = (2\,r - X)\,y,$$

dat is

$$\frac{2\,r\,X^2\,Z}{X^2 + Y^2} = \frac{(2\,r - X)\,2\,r\,X\,Y}{X^2 + Y^2} \quad \text{of} \quad X\,Z = (2\,r - X)\,Y,$$

dus een oppervlak van den tweeden graad.

Nemen wij evenwel

$$f(x, y) = 2\,r + \frac{2\,r\,y}{x} = \frac{2\,r\,(x + y)}{x},$$

dan wordt

$$2\,r\,Z = \frac{2\,r - X}{x}\,2\,r\,(x + y);$$

of wel

$$x\,Z = (2\,r - X)\,(x + y);$$

dat is na substitutie en herleiding

$$X\,Z = (2\,r - X)\,(X + Y),$$

zijnde een regelvlak van den tweeden graad.

Voor andere kegelsneden worden de uitkomsten gewijzigd.

Als toepassing van § 3, stellen wij een cirkel als richtlijn, waarvan de vergelijking is $y^2 = x\,(2\,r - x)$, en de rechte lijn A B evenwijdig aan de Y-as op den afstand $2\,r$.

Alsdan wordt p standvastig $= 2\,r$, en wordt

$$Z = \frac{2\,r - X}{2\,r - x}\,f(x, y).$$

Stellen wij vooreerst $f(x, y) = x$, dan is

$$(2\,r - x)\,Z = (2\,r - X)\,x,$$

of na substitutie van

$$x = \frac{2\,r\,X^2}{X^2 + Y^2}, \quad \text{en} \quad 2\,r - x = \frac{2\,r\,Y^2}{X^2 + Y^2},$$

$$Y^2\,Z = (2\,r - X)\,X^2,$$

een derde-machts regelvlak.

Voor

$$f(x, y) = y = \frac{2\,r\,X\,Y}{X^2 + Y^2},$$

is

$$(2\,r - x)\,Z = (2\,r - X)\,Y \quad \text{of} \quad Y\,Z = (2\,r - X)\,X,$$

een tweede-machts regelvlak.

Voor

$$f(x, y) = x + y,$$

is

$$(2\,r - x)\,Z = (2\,r - X)\,(x + y),$$

of na substitutie

$$\frac{2\,r\,Y^2\,Z}{X^2 + Y^2} = (2\,r - X)\,\frac{2\,r\,X\,(X + Y)}{X^2 + Y^2},$$

derhalve

$$Y^2\,Z = (2\,r - X)\,(X + Y)\,X,$$

en dus een regelvlak van den derden graad.

Evenzoo zou de substitutie van

$$f(x, y) = 2\,r + y,$$

gegeven hebben

$$(2\,r - x)\,Z = (2\,r - X)\,(2\,r + y),$$

of wel

$$\frac{2\,r\,Y^2\,Z}{X^2 + Y^2} = (2\,r - X)\,\frac{2\,r\,(X^2 + Y^2 + X\,Y)}{X^2 + Y^2},$$

waardoor

$$Y^2\,Z = (2\,r - X)\,(X^2 + X\,Y + Y^2),$$

voor de vergelijking van het regelvlak.

Voor $f(x, y) = \frac{2\,r\,y}{x}$, wordt

$$(2\,r - x)\,Z = (2\,r - X)\,\frac{2\,r\,y}{x},$$

of daar $\frac{y}{x} = \frac{Y}{X}$ is,

$$(2\,r - x)\,X\,Z = (2\,r - X)\,2\,r\,Y.$$

Na substitutie is dus

$$\frac{2\,r\,Y^2}{X^2+Y^2}\,X\,Z = 2\,r\,Y\,(2\,r - X),$$

of

$$X\,Y\,Z = (2\,r - X)\,(X^2 + Y^2),$$

een oppervlak van den derden graad.

De hoogte, waarop de Z-as door de beschrijvende lijn wordt gesneden, hebben wij gevonden

$$h = \frac{2\,r}{2\,r - x}\,f\,(x, y);$$

voor

$$f\,(x\,y) = \frac{2\,r\,y}{x},$$

wordt dit

$$h = \frac{4\,r^2\,y}{x\,(2\,r - x)},$$

en daar

$$y^2 = x\,(2\,r - x)$$

is, kunnen wij ook schrijven

$$h = \frac{4\,r^2\,y}{y^2} = \frac{4\,r^2}{y}.$$

Deze waarde wordt een minimum voor $y = \pm\, r$, waardoor

$$h = \pm\, 4\,r.$$

Ter verduidelijking nemen wij in de vergelijking van het regelvlak X standvastig $= r$, dan wordt

$$r\,Y\,Z = r\,(r^2 + Y^2) \quad \text{of} \quad Y\,Z = (r^2 + Y^2) \quad \text{of} \quad Z = Y + \frac{r^2}{Y},$$

zijnde de vergelijking van een scheeve hyperbool met asymptoten op 45°. (zie fig. 6).

De doorsneden evenwijdig aan het $X\,Y$-vlak (Z standvastig $= a$) worden

$$a\,X\,Y = (2\,r - X)\,(X^2 + Y^2),$$

overeenkomende met de kromme in fig. 3 voorgesteld.

Wanneer de richtlijn is eene gelijkzijdige hyperbool

$$y^2 = x\,(x - 2\,r),$$

en de rechte lijn evenwijdig is aan de Y-as op den afstand $2\,r$, wordt de vergelijking

$$Z = \frac{2r - X}{2r - x} f(x, y).$$

Hierin wederom stellende

$$f(x,y) = \frac{2ry}{x} = \frac{2rY}{X},$$

wordt

$$ZX(2r - x) = 2rY(2r - X).$$

Hierin is

$$x = \frac{2rX^2}{X^2 - Y^2},$$

dus

$$2r - x = -\frac{2rY^2}{X^2 - Y^2},$$

zoodat de vergelijking wordt

$$-ZXY^2 = Y(X^2 - Y^2)(2r - X),$$

of wel

$$XYZ = (X^2 - Y^2)(X - 2r),$$

van den derden graad.

Nemen wij X standvastig $= r$, dan wordt de vergelijking van de doorsnede

$$rYZ = (Y^2 - r^2)r \quad \text{of} \quad YZ = Y^2 - r^2,$$

dus

$$Z = Y - \frac{r^2}{Y},$$

zijnde een scheeve hyperbool met asymptoten op 45°. (fig. 7) (Vergelijk *Nieuw Archief*, deel XX, p. 108).

Als toepassing van § 4, onderstellen wij den cirkel en de rechte lijn in het XY-vlak overeenkomstig het voorgaande, dan is alsnu

$$Z = \frac{X - x}{2r - x} f(x, y).$$

Zij vooreerst

$$f(x, y) = x = \frac{2rX^2}{X^2 + Y^2},$$

dan is

$$2r - x = \frac{2rY^2}{X^2 + Y^2},$$

en

$$X - x = \frac{X(X^2 + Y^2) - 2rX^2}{X^2 + Y^2} = \frac{X(X^2 - 2rX + Y^2)}{X^2 + Y^2};$$

zoodat

$$Z(2r - x) = (X - x)x,$$

overgaat in

$$ZY^2(X^2 + Y^2) = X^3(X^2 - 2rX + Y^2),$$

zijnde een vijfde-machts regelvlak.

Voor

$$f(x, y) = y = \frac{2rXY}{X^2 + Y^2},$$

zouden wij hebben

$$(2r - x)Z = (X - x)y,$$

of na substitutie en herleiding,

$$(X^2 + Y^2)YZ = X^2(X^2 - 2rX + Y^2),$$

dus een vierde-machts regelvlak.

Voor

$$f(x, y) = \frac{2ry}{x} = \frac{2rY}{X}$$

wordt

$$(2r - x)Z = (X - x)\frac{2rY}{X},$$

of na substitutie en herleiding

$$YZ = X^2 - 2rX + Y^2,$$

dus een tweede-machts regelvlak.

Stellen wij daarentegen

$$f(x, y) = \frac{2rx}{y} = \frac{2rX}{Y},$$

dan wordt

$$(2r - x)ZY = (X - x)2rX,$$

of na substitutie

$$\frac{2rY^3Z}{X^2 + Y^2} = \frac{X(X^2 - 2rX + Y^2)}{X^2 + Y^2}2rX,$$

dat is

$$Y^3Z = X^2(X^2 - 2rX + Y^2),$$

een vierde-machts regelvlak.

Stellen wij

$$f(x,y) = 2r + \frac{2ry}{x} = \frac{2r(X+Y)}{X},$$

dan wordt

$$(2r - x)Z = (X - x)\,\frac{2r(X+Y)}{X},$$

dus na substitutie

$$(2r - x)XZ = 2r(X - x)(X + Y),$$

of wel

$$Y^2 Z = (X^2 - 2rX + Y^2)(X + Y),$$

een derde-machts regelvlak.

Als toepassing van § 5, onderstellen wij twee rechte lijnen, respectievelijk evenwijdig aan de X- en Y-assen beide op den afstand $2r$.

De vergelijking wordt dan

$$Z = \frac{(2r - Y)X}{2r(X - Y)} f(x,y) \quad \text{en} \quad h = \frac{2rY}{X - Y}.$$

Voor

$$f(x,y) = \frac{2ry}{x} = \frac{2rY}{X},$$

wordt dit

$$2r(X - Y)Z = (2r - Y)\,2rY,$$

dus een tweede-machts regelvlak

$$(X - Y)Z = (2r - Y)Y.$$

Voor

$$f(x,y) = \frac{2rx}{y} = \frac{2rX}{Y},$$

wordt

$$(X - Y)ZY = (2r - Y)X^2,$$

dus een derde-machts regelvlak.

Voor $X = Y$ is $Z = \infty$ en $h = \infty$.

Hiermede achten wij de methode genoegzaam toegelicht, en tevens aangetoond hoe men te handelen heeft om derde-machts-vergelijkingen te doen te voorschijn komen.

§ 9. Algemeen overzicht der vergelijkingen voor de regelvlakken, waarbij de rechte lijn A B wordt ondersteld:

1°. Evenwijdig aan de Y-as (afstand A).

2°. Evenwijdig aan de X-as (afstand B).

$$\left.\begin{aligned}
&1^0.\ Z=\frac{x-X}{x}f(x,y)=\frac{y-Y}{y}f(x,y),\\
&2^0.\ Z=\frac{A-X}{A}f(x,y),\\
&3^0.\ Z=\frac{B-X}{B}f(x,y),
\end{aligned}\right\}\ h=f(x,y);$$

$$4^0.\ Z=\frac{A-X}{A-x}f(x,y),\ h=\frac{A}{A-x}f(x,y),$$

$$5^0.\ Z=\frac{B-Y}{B-y}f(x,y),\ h=\frac{B}{B-y}f(x,y),$$

$$6^0.\ Z=\frac{X-x}{A-x}f(x,y),\ h=\frac{x}{A-x}f(x,y),$$

$$7^0.\ Z=\frac{Y-y}{B-y}f(x,y),\ h=\frac{y}{B-y}f(x,y),$$

$$8^0.\ Z=\frac{(X-A)\,Y}{(B-Y)\,X}f(x,y),\ h=\frac{A\,Y}{B\,X-A\,Y}f(x,y),$$

$$9^0.\ Z=\frac{(Y-B)\,X}{A\,Y-B\,X}f(x,y),\ h=\frac{B\,X}{A\,Y-B\,X}f(x,y).$$

Voor $f(x,y)$ stelle men de boven aangegeven waarden, uitgedrukt in de afgeleide vergelijkingen in X en Y.

$$\begin{matrix}\text{Cirkel}\\ \text{Hyperbool}\end{matrix}\left\{ x=\frac{2\,r\,X^2}{X^2\pm Y^2},\ y=\frac{2\,r\,X\,Y}{X^2\pm Y^2},\right. \quad \Bigg| \quad \text{Parabool}\left\{\begin{aligned} x&=\frac{p\,X^2}{Y^2}\\ y&=\frac{p\,X}{Y}\end{aligned}\right. .$$

§ 10. Onderstellen wij ten tweede eene derde-machts kromme lijn, met middellijn en knoop (overgaande in een keerpunt) als richtlijn in het $X\,Y$-vlak [1]).

Stellen wij in het algemeen den oorsprong in het knooppunt, dan is de vergelijking

$$a\,y^2=x^2\,(b+x),$$

(voor $b=0$ gaat de knoop over in een keerpunt).

Deelen wij deze vergelijking door x^2, dan is

$$\frac{a\,y^2}{x^2}=b+x,$$

1) Dit gedeelte is op de bijeenkomst van 31 Maart niet voorgedragen, wegens beperktheid van den beschikbaren tijd.

en daar

$$x : y = X : Y,$$

zoo is ook

$$\frac{a\,Y^2}{X^2} = b + x,$$

waaruit

$$x = \frac{a\,Y^2 - b\,X^2}{X^2} \text{ en } y = \frac{(a\,Y^2 - b\,X^2)\,Y}{X^3}.$$

Stellen wij nu

$$f(x, y) = x,$$

dan wordt

$$Z = \frac{x - X}{x} f(x, y) = \frac{x - X}{x}\,x = x - X.$$

Hieruit volgt na substitutie

$$Z = \frac{a\,Y^2 - b\,X^2}{X^2} - X \text{ of } Z X^2 = a\,Y^2 - b\,X^2 - X^3.$$

Het oppervlak is dus eene conoïde van den derden graad. Was daarentegen

$$f(x, y) = y,$$

dan is

$$Z = \frac{y - Y}{y} f(x, y) = y - Y,$$

en dus na substitutie van

$$y = \frac{(a\,Y^2 - b\,X^2)\,Y}{X^3},\quad Z = \frac{(a\,Y^2 - b\,X^2)\,Y}{X^3} - Y,$$

of

$$ZX^3 = a\,Y^3 - b\,X^2\,Y - X^3\,Y \text{ of } ZX^3 = (a\,Y^2 - b\,X^2 - X^3)\,Y,$$

en dus van den vierden graad.

Evenzoo zou het gelegen zijn met $f(x, y) = x \pm y$ en zoo voort; alléén $f(x, y) = m\,x$ (waarin m een getal) zou geven $Z = m(x - X)$ en dus een oppervlak van den derden graad.

Wanneer wij het Cayley-oppervlak willen afleiden uit deze derde-graads kromme, moet men de richting der raaklijnen in het knooppunt bepalen; men bevindt die te zijn $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Hiermede in verband substituere men voor $f(x, y)$ de waarde

$$\frac{b\left(y+x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{y-x\sqrt{\frac{b}{a}}},$$

$$tg\,\Phi=\frac{y}{x}=\frac{sin\,\Phi}{cos\,\Phi};$$

$tg\,\alpha$ is bekend uit de vergelijking der richtlijn (fig. 4).

$$p:T=sin\,(\alpha-\Phi):sin\,(\alpha+\Phi),$$

$$T=p\,\frac{sin\,(\alpha+\Phi)}{sin\,(\alpha-\Phi)}=p\,\frac{sin\,\alpha\,.\,cos\,\Phi+cos\,\alpha\,.\,sin\,\Phi}{sin\,\alpha\,.\,cos\,\Phi-cos\,\alpha\,.\,sin\,\Phi}=$$

$$=p\,\frac{tg\,\alpha+tg\,\Phi}{tg\,\alpha-tg\,\Phi}=p\,\frac{x\,tg\,\alpha+y}{x\,tg\,\alpha-y},$$

waarmede uitgedrukt wordt dat in het knooppunt de hoogte $f(x,y)$ op de Z-as van 0 tot ∞ aangroeit. Alsdan wordt de vergelijking van het oppervlak

$$Z=(x-X)\,f(x,y),$$

of na substitutie

$$Z=\left(\frac{x-X}{x}\right)b\left(\frac{y+x\sqrt{\frac{b}{a}}}{y-x\sqrt{\frac{b}{a}}}\right)=\left(\frac{x-X}{x}\right)b\,\frac{Y+X\sqrt{\frac{b}{a}}}{Y-X\sqrt{\frac{b}{a}}},$$

of wel

$$Zx\left(Y-X\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=(x-X)\,b\left(Y+X\sqrt{\frac{b}{a}}\right);$$

hierin voor x schrijvende $\frac{a\,Y^2-b\,X^2}{X^2}$, vindt men

$$Z(a\,Y^2-b\,X^2)\left(Y-X\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=$$

$$=(a\,Y^2-b\,X^2-X^3)\,b\left(Y+X\sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

Beide zijden gedeeld door

$$Y+X\sqrt{\frac{b}{a}},$$

komt

$$Z\left(a\,Y-a\,X\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(Y-X\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=(a\,Y^2-b\,X^2-X^3)\,b,$$

of

$$Z\left(Y - X\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = \frac{b}{a}\,(a\,Y^2 - b\,X^2 - X^3),$$

zijnde een CAYLEY-oppervlak van den derden graad.

Wanneer de raaklijnen in het knooppunt overeenkomen met de X en Y assen, kan men gebruik maken van de formule

$$Z = \frac{y - Y}{y}\,a\,\frac{y}{x} \text{ of } Z\,x = a\,(y - Y).$$

Dit is onder meer het geval met het folium van DESCARTES,

$$y^3 = 3\,a\,x\,y - x^3.$$

Deelende door $x\,y$, heeft men

$$\frac{y^2}{x} = 3\,a - \frac{x^2}{y} \text{ of } 3\,a = \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}.$$

Nu is

$$x : y = X : Y \text{ dus } y = \frac{x\,Y}{X},$$

en derhalve

$$3\,a = \frac{x\,Y^2}{X^2} + \frac{x\,X}{Y} = \frac{x\,(X^3 + Y^3)}{X^2\,Y},$$

waaruit

$$x = \frac{3\,a\,X^2\,Y}{X^3 + Y^3}, \text{ en } y = \frac{3\,a\,X\,Y^2}{X^3 + Y^3}.$$

Hierdoor wordt de vergelijking van het CAYLEY-oppervlak

$$Z\,x = a\,(y - Y),$$

of

$$\frac{3\,a\,X^2\,Y\,Z}{X^3 + Y^3} = \frac{a\,(3\,a\,X\,Y^2 - Y(X^3 + Y^3)}{X^3 + Y^3},$$

of na deeling door $a\,Y$, en herleiding

$$X^3 + Y^3 = 3\,Y(a\,Y - X\,Z),$$

zijnde een regelvlak van den derden graad.

Voor de *Strophoïde* is de hoek, die de raaklijnen van de knoop maken met de X-as, $= 45°$; dus $tg\,\alpha = \pm 1$, waardoor $f(x, y)$ voor het CAYLEY-oppervlak wordt

$$\frac{r\,(y + x)}{y - x}.$$

Voor de *Trisectrix* is

$$tg\,\alpha = \pm \sqrt{3},$$

waardoor

$$f(x,y) = \frac{r\,(y + x\sqrt{3})}{y - x\sqrt{3}},$$

waarin x en y met X en Y kunnen verwisseld worden.

Voor de *Strophoïde* is

$$y^2 = \frac{r - x}{r + x}\,x^2,$$

waardoor

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{Y^2}{X^2} = \frac{r - x}{r + x}.$$

Alzoo is

$$x = \frac{r\,(X^2 - Y^2)}{X^2 + Y^2}, \text{ en } y = \frac{r\,(X^2 - Y^2)\,Y}{(X^2 + Y^2)\,X}.$$

Voor het CAYLEY-oppervlak is nu

$$Z = \frac{x - X}{x} f(x,y) = \frac{x - X}{x}\,r\,\frac{x + y}{x - y},$$

of wel

$$Z\,x\,(x - y) = (x - X)\,(x + y)\,r.$$

Na substitutie der hierboven gevonden waarden voor x en y, vindt men na herleiding

$$Z\,(X - Y)^2 = r\,(X^2 - Y^2) - X\,(X^2 + Y^2).$$

Voor de *Trisectrix* is

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{Y^2}{X^2} = \frac{3\,r - 2\,x}{r + 2\,x}.$$

Hieruit volgt

$$x = \frac{r\,(3\,X^2 - Y^2)}{2\,(X^2 + Y^2)},$$

en dus

$$y = \frac{x\,Y}{X} = \frac{r\,Y\,(3\,X^2 - Y^2)}{2\,X\,(X^2 + Y^2)}.$$

Nu wordt

$$Z = \frac{x - X}{x} f(x,y) = \frac{x - X}{x} \cdot \frac{r\,(y + x\sqrt{3})}{y - x\sqrt{3}} = \frac{(x - X)}{x}\,r \cdot \frac{(Y + X\sqrt{3})}{Y - X\sqrt{3}},$$

of

$$Z\,x\,(Y - X\sqrt{3}) = r\,(x - X)\,(Y + X\sqrt{3}).$$

Door substitutie van de waarde van x vindt men na deeling door $Y + X\sqrt{3}$,

$$Z(Y - X\sqrt{3})^2 = r(3X^2 - Y^2) - 2X(X^2 + Y^2),$$

voor de vergelijking van het CAYLEY-oppervlak.

Nemen wij als richtlijn de *cubische parabool* $x^3 = py^2$, dan wordt

$$\frac{x^2}{y^2}x = \frac{X^2}{Y^2}x = p,$$

dus

$$x = \frac{pY^2}{X^2}, \text{ en } y = \frac{xY}{X} = \frac{pY^3}{X^3}.$$

Hier kan nu

$$f(x, y) = \frac{py}{x},$$

worden gesteld, zoodat

$$Z = \frac{y - Y}{y}, \frac{py}{x} = p\frac{(y - Y)}{x},$$

zijn zal, of

$$Zx = p(y - Y).$$

Na substitutie vindt men

$$\frac{pY^2}{X^2}Z = p\left(\frac{pY^3}{X^3} - Y\right),$$

of herleid

$$XYZ = pY^2 - X^3,$$

voor de vergelijking van het regelvlak; de lijn in het oneindige valt niet in de Z-as. Het is dus géén CAYLEY-oppervlak.

Voor de *cissoïde* is

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x},$$

of

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{Y^2}{X^2} = \frac{x}{2r - x},$$

waaruit

$$x = \frac{2rY^2}{X^2 + Y^2},$$

en dus

$$y = \frac{x\,Y}{X} = \frac{2\,r\,Y^3}{X\,(X^2 + Y^2)}.$$

Hier is $f(x, y)$ wederom $= \dfrac{2\,r\,y}{x}$, zoodat

$$Z\,x = 2\,r\,(y - Y).$$

Na substitutie zal dus de vergelijking van het regelvlak worden voorgesteld door

$$X\,Y\,Z = 2\,r\,Y^2 - X\,(X^2 + Y^2).$$

Het is mede g é é n CAYLEY-oppervlak.

Nemen wij als richtlijn de kromme (zie fig. 8)

$$y^3 = x^2\,(2\,r - x),$$

die een keerpunt heeft in den oorsprong; dan is

$$\frac{y^2}{x^2}\,y = \frac{Y^2}{X^2}\,y = \frac{Y^3}{X^3}\,x = 2\,r - x,$$

zoodat

$$x = \frac{2\,r\,X^3}{X^3 + Y^3} \text{ en } y = \frac{x\,Y}{X} = \frac{2\,r\,X^2\,Y}{X^3 + Y^3}.$$

Stellen wij

$$f(x, y) = \frac{2\,r\,y}{x},$$

dan is

$$Z = \frac{y - Y}{y}\left(\frac{2\,r\,y}{x}\right),$$

of

$$Z\,x = 2\,r\,(y - Y),$$

dus na substitutie

$$X^3\,Z = Y\,(2\,r\,X^2 - (X^3 + Y^3)),$$

en dus een vierde-graads regelvlak.

Stellen wij daarentegen

$$f(x, y) = \frac{2\,r\,x}{y},$$

dan is

$$Z = \frac{x - X}{x}\left(\frac{2\,r\,x}{y}\right),$$

of

$$y\,Z = 2\,r\,(x - X),$$

of na substitutie

$$2\,X\,Y\,Z = 2\,r\,X^2 - (X^3 + Y^3).$$

Het regelvlak is nu van den derden graad; maar is geen CAYLEY-oppervlak.

$$f(x, y) = \frac{2\,r\,x}{y},$$

wordt oneindig voor $y = 0$, en hiermede stemmen twee waarden overeen, namelijk $x = 0$ (de oorsprong) en $x = 2\,r$, het snijpunt van de kromme met de X-as.

Door de substitutie van

$$f(x, y) = \frac{2\,x\,X}{Y - X},$$

wordt

$$X\,Z(Y - X) = 2\,r\,X^2 - (X^3 + Y^3).$$

In den oorsprong is die $= 0$ en in de richting der asymptoot (op $45°$) $= \infty$, dus géén CAYLEY-oppervlak.

Voor de kromme (fig. 3)

$$(y - a)\,(x^2 + y^2) = 2\,r\,x\,y,$$

vinden wij, door $x\,y$ deelende,

$$(y - a)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 2\,r = (y - a)\left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}\right),$$

of

$$2\,r\,X\,Y = (y - a)\,(X^2 + Y^2),$$

waaruit volgt

$$y = \frac{2\,r\,X\,Y + a\,(X^2 + Y^2)}{X^2 + Y^2} \quad \text{en} \quad x = \frac{(2\,r\,X\,Y + a\,(X^2 + Y^2))\,X}{(X^2 + Y^2)\,Y}.$$

Stellen wij hierin

$$f(x, y) = y,$$

dan is

$$Z = y - Y,$$

of de waarden substitueerende

$$Z\,(X^2 + Y^2) = 2\,r\,X\,Y + (a - Y)\,(X^2 + Y^2),$$

dus een derdegraads *conoïde.*

Was daarentegen

$$f(x, y) = x,$$

dan wordt

$$Z = x - X,$$

of na substitutie

$$YZ(X^2+Y^2)=(2rXY+(a-X)(X^2+Y^2))X,$$
en derhalve een vierde-graads *conoïde.*

AANMERKING.

Niet altijd kunnen de coördinaten der Richtlijn (x en y) in rationele vormen van X en Y worden uitgedrukt. Dit is onder anderen het geval met de *Versiera* (kromme van AGNESI); die voorgesteld wordt door de vergelijking

$$x y^2 = a^2 (2r - x).$$

Hieruit volgt

$$x(y^2+a^2)=2ra^2,$$

en daar

$$x=\frac{yX}{Y} \text{ is, } y(y^2+a^2)=\frac{2ra^2Y}{X}.$$

Hier wordt dus y gevonden door de formule van CARDANUS

$$y=\sqrt[3]{\left\{-\frac{ra^2Y}{X}+\sqrt{\left(\frac{r^2a^4Y^2}{X^2}\frac{1}{27}a^6\right)}\right\}}+$$
$$+\sqrt[3]{\left\{-\frac{ra^2Y}{X}-\sqrt{\left(\frac{r^2a^4Y^2}{X^2}\frac{1}{27}a^6\right)}\right\}},$$

waaruit $x=\frac{yX}{Y}$ is af te leiden.

De bovenstaande toepassingen mogen voldoende wezen tot toelichting van de methode, die zeker geen bezwaar kan opleveren, en door de verscheidenheid der behandelde gevallen het bewijs levert van hare algemeenheid.

DE VERDEELING VAN EEN HOEK IN 2^n+1 GELIJKE DEELEN.

DOOR

Dr. A. KEMPE.

Wanneer men (zie Plaat II fig. 1[a]) op de y-as van een rechthoekig stelsel met willekeurigen straal M O een cirkel beschrijft zóó, dat zijn middellijn met deze samenvalt, en de x-as raaklijn is in O; wanneer men dan door O willekeurige lijnen trekt, die den cirkel in O, A, A_1, A_2, A_3, A_4, enz. snijden en vervolgens deze verlengt met stukken O R = A B = $A_1 B_1$ = $A_2 B_2$ = $A_3 B_3$ = $A_4 B_4$ = enz. = O M = r, dan ontstaat er een nieuwe kromme lijn, die de merkwaardige eigenschap heeft om het derde deel van een hoek te doen kennen. We zullen haar noemen de lijn B. Ze heeft boven de X-as den vorm van een hoefijzer, en onder deze gaat ze (fig. 1[b]) door haar manier van ontstaan, in een cirkel over.

Gaat men echter op deze wijze voort en neemt men op het verlengde der O B' stukken R S = R M, B C = B M, $B_1 C_1 = B_1$ M, $B_2 C_2 = B_2$ M, . . . , enz. (fig. 1[a]), die nu natuurlijk niet meer onderling gelijk zijn, dan ontstaat er een derde lijn, die het vijfde deel van een hoek aangeeft. We zullen haar de lijn C noemen. In haar geheele verloop is zij geteekend in fig. 1[b].

Gaat men vervolgens voort (fig. 1[b]) de O C' te verlengen met stukken C D, $C_1 D_1$, $C_2 D_2$, $C_3 D_3$, enz., die respectivelijk gelijk zijn aan C M, C_1 M, C_2 M, C_3 M, dan verkrijgt men

een vierde lijn *D*, die het negende deel van een hoek leert vinden.

Herhaalt men deze bewerking, dan ontstaan er soortgelijke hoefijzervormige lijnen, die de merkwaardige eigenschap bezitten respectivelijk het zeventiende, drie-endertigste, vijf-en-zestigste, in het algemeen het $(2^n + 1)$ deel van een willekeurigen hoek te doen kennen.

In de teekening van fig. 1^b is de arbeid slechts voortgezet tot de kromme *E*, die het zeventiende deel van een hoek zal doen vinden.

Trekt men nu door M een willekeurige lijn, die bij M een willekeurigen hoek α maakt, en die het stelsel kromme lijnen in de punten F, G, H, I en K snijdt, dan is het gemakkelijk te bewijzen dat, als F, G, H, I en K met O verbonden worden,
bij F, de helft van $\angle \alpha$,
bij G, het derde van $\angle \alpha$,
bij H, het vijfde het $\angle \alpha$,
bij I, het negende van $\angle \alpha$,
bij K, het zeventiende van $\angle \alpha$ gevormd wordt; en wel — bepalen we ons tot het zeventiende deel — om deze reden:

Verbindt men het snijpunt L van OK en de kromme D (fig. 1^b) met M, en evenzoo N, P en Q, dan ontstaan er door de constructie der krommen *B*, *C*, *D* en *E* eenige gelijkbeenige driehoeken, die het bewijs, dat wij beoogen, gemakkelijk kunnen maken. 't Is toch duidelijk, dat de driehoeken LMK, NML, PMN, QMP, en ten slotte OMQ, alle gelijkbeenig zijn, (fig. 1^b en fig. 1^a, welke laatste ter verduidelijking de vergrooting is van de kromme lijnen A, B en C. in fig. 1^b) zoodat wanneer $\varkappa$ de hoek is bij K:

de buitenhoek bij $L = 2 \angle \varkappa$,
die bij $N = 4 \angle \varkappa$,
bij $P = 8 \angle \varkappa$,
bij $Q = 16 \angle \varkappa$, dus $\angle MOQ = 16 \angle \varkappa$.

Waaruit dus dadelijk blijkt, dat $\angle \alpha$ als buitenhoek van $\triangle OMK = 17 \angle \varkappa$,

$$\text{of } \angle \varkappa = \frac{1}{17} \text{ van } \angle \alpha.$$

Een dergelijke redeneering bewijst dat:

$$\angle \iota = \frac{1}{9} \angle \alpha,$$

$$\angle \eta = \frac{1}{5} \angle \alpha,$$

$$\angle \gamma = \frac{1}{3} \angle \alpha,$$

$$\angle \beta = \frac{1}{2} \angle \alpha.$$

Wanneer de vergelijkingen van de verschillende lijnen worden opgemaakt op rechthoekige coördinaten, dan nemen ze al heel spoedig reusachtige afmetingen aan; daarom is het te verkiezen liever hare vergelijkingen op te maken op poolcoördinaten; en hoewel ook die vormen al spoedig sterk in lengte toenemen, zijn ze toch nog beknopter dan op rechthoekige coördinaten. Ook is er dan meer wet in de vergelijkingen te vinden, hoewel die toch sprekender kon zijn.

We zullen onze voorloopige uitkomsten hier laten volgen, ons voorbehoudende om op het onderwerp terug te komen.

Nemen wij de X-as als poolas, O als pool — dat punt biedt zich als van zelve daartoe aan — dan hebben wij, als poolvergelijking

van lijn A (den cirkel): $\rho = 2\,r \sin \varphi$,

$$\left.\begin{array}{l}
\text{van lijn } B\text{:}\ \rho = r + 2\,r \sin \varphi, \\
\text{van lijn } C\text{:}\ \rho = r\,(1 + 2 \sin \varphi) + r \sqrt{2 + 2 \sin \varphi}, \\
\text{van lijn } D\text{:}\ \rho = r\,(1 + 2 \sin \varphi) + r \sqrt{2 + 2 \sin \varphi}\,. \\
\qquad .\,(1 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \sin \varphi}}), \\
\text{van lijn } E\text{:}\ \rho = r\,(1 + 2 \sin \varphi) + r \sqrt{2 + 2 \sin \varphi}\,. \\
\quad .\,(1 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \sin \varphi}}) + r \sqrt{2\,(1 + \sin \varphi)}\,. \\
\quad .\left[4 + 2 \sqrt{2 + 2 \sin \varphi}) + (2 + \sqrt{2 + 2 \sin \varphi})\,.\right. \\
\quad \left.\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \sin \varphi}}\right].
\end{array}\right\} (1)$$

De bouw van de formulen is nog niet van dien aard, om

er dadelijk de poolvergelijking voor de lijn uit te kunnen opschrijven, die den hoek in $2^n + 1$ deelen deelt.

De gedachtengang, waardoor wij tot (1) zijn gekomen, is deze: Is lijn O E de radius vector, die het geheele stelsel doorsnijdt, dan is, ρ de radius vector en ϕ de anomalie zijnde, voor cirkel A natuurlijk $\rho = 2\,r \sin\phi$,
voor lijn B natuurlijk $\rho = r + 2\,r \sin\phi$,
voor lijn C is $\rho = \mathrm{OB} + \mathrm{BC} = \mathrm{OB} + \mathrm{BM} = \mathrm{OB} +$

$$+ \sqrt{\mathrm{OB}^2 - 2\,r\,\mathrm{OB}\sin\phi + r^2} =$$

$$= r + 2 r \sin\phi + \sqrt{(r + 2\,r \sin\phi)^2 - 2\,r\,(r + 2\,r \sin\phi)\sin\phi + r^2} =$$

$$= r + 2\,r \sin\phi + r\sqrt{2 + 2\sin\phi};$$

en op deze wijze is ook de poolvergelijking voor de lijnen D en E opgemaakt, wat voor de laatste vooral nog al eenige herleiding noodzakelijk maakte, en voor de volgende lijnen van toenemenden omvang moet zijn. Wij hebben de rekening voortgezet tot E om er een wet in op te sporen, doch, zooals we al opmerkten, tot nogtoe is dit niet gelukt.

Uit den aard der zaak is bij het berekenen van de vergelijking eener lijn als E, het maken van fouten licht mogelijk, en daarom hebben we haar aan een paar proeven onderworpen. Daar die proeven goed uitvielen, is het niet onwaarschijnlijk, dat de rekening goed is.

De vergelijking voor lijn E, haar nog iets beknopter schrijvende, is:

$$\rho = r(1 + 2\sin\phi) + r\sqrt{2 + 2\sin\phi}\left[1 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\sin\phi} + \sqrt{(2 + \sqrt{2 + 2\sin\phi})\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\sin\phi}}\right)}}\right];$$

voor $\phi = 0$ verandert zij in:

$$\rho = \mathrm{OU} = r + r\sqrt{2}\left[1 + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{(2 + \sqrt{2})\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)}}\right] \quad \ldots \quad (2)$$

Maar volgens de figuur is:

$\mathrm{OR} = r$,

$\mathrm{RS} = r\sqrt{2}$,

$$\mathrm{S\,T}=\mathrm{S\,M}=\sqrt{r^2+(r+r\sqrt{2})^2}=r\sqrt{2(2+\sqrt{2})},$$

$$\mathrm{T\,U}=\mathrm{T\,M}=\sqrt{r^2+(\mathrm{O\,R}+\mathrm{R\,S}+\mathrm{S\,T})^2}=$$

$$=r\sqrt{2\left[4+2\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\right]}=$$

$$=r\sqrt{2(2+\sqrt{2})\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)},$$

$$\mathrm{O\,U}=r+r\sqrt{2}\left[1+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(2+\sqrt{2})\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}\right],$$

wat met (2) overeenkomt.

Voor $\Phi = 90°$ wordt (2) $\rho = 17\,r$, wat met de figuur volkomen strookt.

Nog enkele opmerkingen mogen volgen.

De verdeeling van een hoek in vijf gelijke deelen kan, even als zijn bekende verdeeling in drie deelen, op gemakkelijker manier geschieden dan door het construeeren der kromme C; intusschen is dan de constructie mechanisch, niet mathematisch. Ze is namelijk deze: even als bij de bekende constructie van een hoek in drie deelen, beschrijft men uit zijn hoekpunt met willekeurigen straal een cirkelboog (fig. 2), past op een lijn dien straal af, en legt deze — namelijk de lijn — zoo door het punt A, dat C D = C M en D E = D M wordt, iets wat natuurlijk alleen door draaiing om en schuiving door A kan geschieden, dus louter mechanisch is. Voor het negende, laat staan voor het zeventiende deel van een hoek, heeft deze handelwijze te veel bezwaren; dan getrooste men zich liever de constructie der kromme lijnen, die, wanneer de hoek stomp is, slechts voor een zeer gering deel behoeft te geschieden. Hoe kleiner de gegeven hoek is, hoe grooter deel van het stelsel krommen men moet consrueeren; hoe grooter die hoek is, hoe geringer deel men van de krommen noodig heeft. Men zal dat gemakkelijk inzien. Voorts is de wijze, om de lijnen B, C, D, E, enz. te verkrijgen, allereenvoudigst, en haar ontstaan gehoorzaamt aan één wet.

Wat den vorm van de krommen onder de X as betreft, men ziet gemakkelijk in, dat die voor lijn B een halve cirkel is, voor de lijnen C, D E, enz. worden het echter meer kromme lijnen, die gelijken op hun deel boven de X as. Verder zijn alle C^n, D^n, E^n, enz., geheel voltooid, volkomen symmetrisch en fraai van bouw.

Dat door deze verdeeling ook de ingeschreven regelmatige negenhoek, zeventienhoek, drieendertighoek, enz., kunnen geconstrueerd worden is duidelijk, daar men voor den willekeurigen hoek α natuurlijk ook 90° kan nemen, en dus een hoek van 10° aan het middelpunt van een cirkel kan uitzetten en dezen vier maal nemen. Evenzoo kan men handelen met het zeventiende deel van 90°, het drieendertigste deel, enz.

Uit de getallen, begrepen in de formule $2^n + 1$ voor $n = 0$, 1, 2, 3, enz. blijkt, dat zich de volgende eenvoudige deelen van een willekeurigen hoek laten vinden, die uit deeling of vermenigvuldiging, ontstaan, om niet te spreken van verdere samenstelling.

Het $\frac{1}{2}$ deel volgens de constructie of op andere bekende wijze.

Het $\frac{1}{3}$ volgens de constructie.

Het $\frac{1}{4}$ op bekende wijze.

Het $\frac{1}{5}$ volgens de constructie.

Het $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

Het $\frac{1}{7}$ kan niet, daar $2^n + 1$ door 7 gedeeld, de periodieke resten 5, 2, 3 oplevert.

Het $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

Het $\frac{1}{9}$ volgens de constructie.

Het $\frac{1}{10} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$.

Het $\frac{1}{11} = \frac{3}{33}$, men neme het $\frac{1}{33}$ dan 3 maal. $(33 = 2^5 + 1)$.

Het $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$.

Het $\frac{1}{13} = \frac{5}{65}$, men neme het $\frac{1}{65}$ deel, 5 maal. $(65 = 2^6 + 1)$.

Het $\frac{1}{14}$ kan niet, omdat $\frac{1}{7}$ deel niet kan.

Het $\frac{1}{15} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$.

Het $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Het $\frac{1}{17}$ volgens de constructie.

Het $\frac{1}{18} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9}$.

Het $\frac{1}{19} = \frac{27}{513}$, men neme het $\frac{1}{513}$ $(513 = 2^9 + 1)$ en dat 27 maal, dus $3 \times 3 \times 3$ keer.

Het $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$.

Het $\frac{1}{21}$ kan niet, omdat $\frac{1}{7}$ deel niet kan.

Het $\frac{1}{22} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{11}$.

Het $\frac{1}{23}$ kan niet, daar $2^n + 1$, door 23 gedeeld, de periodieke resten 4, 7, 13, 2, 3, 5, 9, 17, 10, 19, 14 oplevert.

Het $\frac{1}{24} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8}$.

Het $\frac{1}{25} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$.

Het $\frac{1}{26} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{13}$.

Het $\frac{1}{27} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9}$.

Het $\frac{1}{28}$ kan niet, omdat $\frac{1}{7}$ deel niet kan.

Het $\frac{1}{29} = \frac{565}{16385} = \frac{5 \times 113}{16385}$, men neme het $\frac{1}{16385}$ ($16385 = 2^{14} + 1$), en dat 5×113 maal.

Het $\frac{1}{30} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10}$.

Het $\frac{1}{31}$ kan niet, omdat $2^n + 1$, gedeeld door 31, de periodieke resten 17, 2, 3, 5, 9 oplevert.

Het $\frac{1}{32} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$.

Het $\frac{1}{33}$ volgens de constructie.

Het $\frac{1}{34} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{17}$.

Het $\frac{1}{35}$ kan niet, alweer omdat $\frac{1}{7}$ niet kan.

Het $\frac{1}{36} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{9}$.

Het $\frac{1}{37} = \frac{7085}{262145} = \frac{5 \times 13 \times 109}{262145}$ ($262145 = 2^{18} + 1$).

Het $\frac{1}{38} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{19}$.

Het $\frac{1}{39} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{13}$.

Het $\frac{1}{40} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10}$.

Het $\frac{1}{41} = \frac{25}{1025} = \frac{5 \times 5}{1025}$ ($1025 = 2^{10} + 1$).

Het $\frac{1}{42}$ kan niet, wegens het $\frac{1}{7}$ deel.

Het $\frac{1}{43} = \frac{3}{129}$ ($129 = 2^7 + 1$).

Het $\frac{1}{44} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{11}$.

Het $\frac{1}{45} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{15}$.

Het $\frac{1}{46} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{23}$, dus kan niet.

Het $\frac{1}{47}$ kan niet, omdat $2^n + 1$, gedeeld door 47, de periodieke resten 18, 35, 22, 43, 38, 28, 8, 15, 29, 10, 19, 37, 26, 4, 7, 24, 25, 2, 13, 5, 9, 17, 23 oplevert.

Het $\frac{1}{48} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{16}$.

Het $\frac{1}{49}$ stuit af op $\frac{1}{7}$.

Het $\frac{1}{50} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{10}$.

Verder strekten we het onderzoek nog niet uit.

Om voor praktische doeleinden niet immer een uitgebreide teekening te moeten maken, zou men er een zoo nauwkeurig mogelijk monogram van kunnen lithografeeren, en er de te verdeelen hoeken met potlood op teekenen — na gebruik konden de potloodlijnen verwijderd worden.

Wellicht betraden we in het voorgaande een gebied, door een ander reeds in 't lange en breede doorwandeld, wellicht begaven we ons, nieuwe wegen zoekende, op reeds bekende paden. We weten het niet, maar, daar bewezen is, dat met passer en liniaal een hoek in geen verdere deelen te verdeelen is dan telkens in tweeën, zoo komt het ons voor, dat andere kromme lijnen, die wel is waar niet continue geconstrueerd kunnen worden, maar toch zoo nauwkeurig als men verkiest, en die in de bestaande leemte van deeling voorzien, niet geheel van belangrijkheid ontbloot zijn.

RESTEN VAN WEDERKEERIGE REEKSEN

DOOR

W. MANTEL.

---

1. In het vijfde deel der *Wiskundige Opgaven* werd door mij onder n° 36 een vraagstuk gesteld omtrent de resten, welke de termen eener wederkeerige reeks bij deeling door een ondeelbaar getal overlaten. De behandelde reeks was die, welke E. LUCAS de reeks van FIBONACCI noemde; namelijk 0, 1, 1, 2, . . . ; elke term is gelijk aan de som der twee voorgaande. Bij deeling door een ondeelbaar getal p worden periodiek terugkeerende resten gevonden; het aantal termen eener periode is p^2-1. Voor deze bijzondere stelling vindt men ter aangehaalder plaatse twee bewijzen; het eerste, van den Heer T. J. ALLERSMA, berust op elementaire gronden; het tweede, van mij, berust op de theorie der stelkundige geheele getallen van DEDEKIND. Beide bewijzen openen weinig uitzicht op algemeene uitkomsten.

Bij hervatting van het onderwerp heb ik vooreerst bij inductie vrij algemeene stellingen gevonden, zoodat de behoefte aan betere methoden van bewijsvoering zich sterk deed gevoelen; toen ik bijvoorbeeld de reeks: 0, 0, 0, 1, 0, 0, 4, . . . met de betrekkingsschaal $C_n = 4\ C_{n-3} - 5\ C_{n-4}$ opstelde, en mij zelven voorspelde, bij deeling door 3 eene restenperiode van 80 termen, bij deeling door 7 eene van 336 termen te zullen vinden, en daarna die voorspelling vervuld zag door de proef; toen was het niet meer dan natuurlijk, dat nog

eens alle beschikbare hulpmiddelen werden nagezien, om tot algemeene bewijzen te geraken.

Bij dit nazien kwam ik tot de ontdekking, dat de theorie, welke tot de verklaring der waargenomen verschijnsels dient, reeds jaren rustig in mijne boekenkast had gesluimerd. Zij is ontwikkeld door SERRET in zijnen *Cours d'Algèbre supérieure*, *Section III*, *Chapitre III*. Terwijl ik nu wel den grooten wiskundigen zoude willen vragen om bij de ontwikkeling hunner theorieën wat toepassingen te geven, opdat de eenvoudige lezer ook iets omtrent de wijdte der strekking te weten kome; zoo heb ik het intusschen nuttig geacht den lezers van dit tijdschrift mijne uitkomsten als toelichting van de theorie van SERRET te ontvouwen.

2. Eene wederkeerige reeks van de n^e orde is eene reeks, van welke iedere term eene gegeven lineaire functie van de n voorgaande is. Tot de wederkeerige reeksen behooren ook de meetkundige, deze zijn van de eerste orde; verder de rekenkundige van alle orden; van deze laatsten is het ordegetal in hare qualiteit van rekenkundige reeks één lager dan het ordegetal als wederkeerige reeks. Het is bekend, dat, als men termen van eene meetkundige of rekenkundige reeks door hetzelfde getal deelt, de resten repeteeren. Hetzelfde zal in de volgende bladzijden worden verklaard van de wederkeerige reeksen in het algemeen. Natuurlijk moeten de door ons beschouwde reeksen slechts geheele getallen tot termen hebben. Wij zullen daarom de betrekkingsschaal, dat is de lineaire betrekking tusschen $n+1$ op elkander volgende termen, in dezen vorm onderstellen,

$$a_n C_k + a_{n-1} C_{k+1} + a_{n-2} C_{k+2} + \ldots + a_1 C_{k+n-1} + C_{k+n} = 0.$$

De getallen C_0, C_1, C_2, ... zijn dan de coëfficiënten der reeks $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$, welke verkregen wordt door eenen veelterm van den $(n-1)^{en}$ graad te deelen door

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + 1,$$

als bij de deeling de termen worden gerangschikt naar klimmende machten van x. Wil men, dat de reeks ook naar links in geheele getallen kunne worden voortgezet, dan moet

men zich beperken tot het geval $a_n = 1$; wij zullen hiervan geen gebruik maken.

3. Wanneer de wederkeerige reeks C_0, C_1, C_2, ... repeteert, en de repetent r termen heeft, dan zal de reeks $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$ door vermenigvuldiging met $1 - x^r$ overgaan in eenen veelterm van hoogstens den $(r-1)^{en}$ graad; die reeks heeft dus eene voortbrengende breuk, welker noemer een deeler is van $1 - x^r$. Omgekeerd zal zulk eene breuk altijd eene repeteerende wederkeerige reeks voortbrengen; want als de breuk tot den noemer $1 - x^r$ herleid is, dan wijst deze de betrekkingsschaal $C_k - C_{r+k} = 0$ aan.

Deze beschouwing blijft gelden, wanneer men niet de termen van eene wederkeerige reeks zelve, maar in hunne plaats de resten ten aanzien van zekeren deeler of modulus p aanmerkt; men laat dan overal veelvouden van p weg; dit moet dan ook gebeuren, wanneer men nagaat, of de noemer $f(x)$ een deeler is van $1 - x^r$. Wanneer de resten van C_0, C_1, C_2, ... ten aanzien van p een repetent van r termen opleveren, dan zal het product $(1 - x^r)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots)$, na weglating van veelvouden van p uit de coëfficiënten, een veelterm worden van den graad $r - 1$ of minder. Men noemt dit product dan »*volgens den modulus p congruent*" met dien veelterm. Door in den teller en in den noemer der voortbrengende breuk de coëfficiënten met passende veelvouden van p te vermeerderen of te verminderen zal de breuk meestal kunnen worden vereenvoudigd, stel tot $\Phi(x) : f(x)$. Dan moet $f(x)$ dus op dezelfde wijze als een deeler van $1 - x^r$ kunnen worden aangemerkt.

Uit deze eenvoudige beschouwingen blijkt ons de nuttigheid van eene theorie der deelbaarheid van veeltermen, van welke de coëfficiënten volgens een modulus tot hun resten worden herleid. Tevens zien wij, dat deze theorie alle reeksen zal omvatten, die repeteerende resten geven; immers behoeft alleen dit repeteeren gegeven te zijn om te kunnen besluiten, dat de reeks $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$ congruent is met eene wederkeerige, welke een deeler van $1 - x^r$ tot noemer van hare voortbrengende breuk heeft.

4. Wanneer men eene gewone breuk tot eene repeteerende tiendeelige herleidt, dan behandelt men een bijzonder geval van de reeksen, die hier beschouwd worden. Men zoekt dan den repetent der resten, welke de machten van tien overlaten bij deeling door den noemer der gewone breuk; men heeft dus te doen met de wederkeerige reeks, die $C_n = 10\ C_{n-1}$ tot betrekkingsschaal heeft. Dat de tiendeelige breuk moet repeteeren weet men uit het aantal mogelijke resten, dat hier één minder is dan de noemer; hiermede is meteen eene bovenste grens voor het aantal cijfers van den repetent gevonden; verder weet men uit het theorema van FERMAT, dat deze grens bij een ondeelbaren noemer ook het aantal aangeeft, of een veelvoud van dit aantal is.

Heeft men te doen met eene wederkeerige reeks der n^e orde, dan kan men met dergelijke beschouwingen aanvangen. Het is misschien goed een klein voorbeeld uit te schrijven; ik neem de reeks der vierde orde, 0, 0, 0, 1, ... met $C_n = 4\ C_{n-3} - 5\ C_{n-4}$ tot betrekkingsschaal, en bepaal de resten naar den modulus 3. Het is dan niet noodig de termen zelven te berekenen; men laat gedurende de berekening steeds de veelvouden van 3 weg; de schaal wordt daardoor vereenvoudigd tot $C_n = C_{n-3} + C_{n-4}$. De resten worden,

00010 01101 21100 21020 12210
10111 12220 11212 00020 ...

Na de veertigste rest komen de oude terug, telkens verdubbeld; na de tachtigste zouden zij dus met 4 vermenigvuldigd wederkomen; maar na weglating van veelvouden van 3 zijn zij dan onveranderd; er zijn dus 80 termen in den repetent.

Dit aantal 80 is ook als bovenste grens aan te geven voor de resten naar den modulus 3 voor elke reeks van de vierde orde. Vier op elkander volgende resten vormen namelijk steeds eene der verschikkingen met herhalingen vier aan vier van de drie elementen 0, 1, 2. Het aantal mogelijke verschikkingen is $3^4 = 81$; onder deze is er eene, die hier niet te pas kan komen, namelijk 0 0 0 0; dus kunnen er niet meer dan 80 worden gevonden uit de reeks der resten; en die reeks kan dezelfde verschikking geen tweemaal ver-

toonen, of zij gaat repeteeren, dewijl vier termen de geheele reeks bepalen.

De reeks, die hier ten voorbeeld gesteld werd, is te verkrijgen uit de deeling $x^3 : (1 - 4x^3 + 5x^4)$. Neemt men een anderen noemer, dan vindt men dikwijls eene reeks, bij welke een repetent behoort met minder dan 80 termen; het aantal is zelfs niet steeds een deeler van 80; zoo vindt men bij $x^3 : (1 + x + 2x^3 - x^4)$ eenen repetent van slechts 6 termen. Men weet, dat dergelijke zaken bij de repeteerende tiendeelige breuken er van afhangen, of de noemer der gewone breuk ondeelbaar is of niet. Iets dergelijks is op te merken bij de noemers der voortbrengende breuken in deze voorbeelden van wederkeerige reeksen. De noemers zijn wel is waar niet in factoren te ontbinden, maar terwijl het niet gelukt een product aan te wijzen, dat volgens den modulus 3 congruent is met den vorm $1 - 4x^3 + 5x^4$, is dit wel het geval met den noemer van het laatste voorbeeld; inderdaad is

$$1 + x + 2x^3 - x^4 \equiv 1 - 2x + 2x^3 - x^4 = (1 + x)(1 - x)^3$$
(mod. 3).

5. SERRET noemt eene geheele functie van x met geheele getallen tot coëfficiënten »*volgens den modulus p onherleidbaar*", wanneer zij niet door eene functie van lager graad deelbaar is, ook al verwaarloost men veelvouden van p; bovendien stelt hij den eisch, dat de coëfficiënt der hoogste macht van x de eenheid is. De laatste beperking is natuurlijk van geen hoog belang; voor de beschouwing der wederkeerige reeksen schijnt het eigenaardiger om den bekenden term gelijk één te nemen. Van zulke functies kan men nu eene theorie der deelbaarheid opstellen, die in vele punten overeenstemt met de theorie der deelbaarheid van geheele getallen. De hoofdstelling, dat een getal slechts op eene manier in enkelvoudige deelers kan ontbonden worden, heeft hier haar evenbeeld, omdat de rekenwijze voor den grootsten gemeenen deeler op deze functies is over te brengen; en deze rekenwijze levert de hulpmiddelen op, die voor het bewijs van de hoofdstelling gebruikt worden. Wij zullen deze

bewijsvoering hier niet ontwikkelen, omdat wij ons slechts ten doel gesteld hebben de theorie van SERRET toe te lichten; wie het onderwerp wil doorgronden, bestudeere liever de bron zelve. De stelling, om welke het hier vooral te doen is, is de overeenkomstige van de stelling van FERMAT. Zij luidt aldus:

Elke veelterm $F(x)$ van den n^{en} graad met geheele getallen tot coëfficiënten, die volgens den ondeelbaren modulus p onherleidbaar is, is volgens dien modulus deelbaar op de functie $x^{p^n} - x$.

Door deze stelling wordt dus gezegd, dat bijv. $x^{81} - x$, en dus ook $x^{80} - 1$, deelbaar moet wezen door $1 - 4x^3 + 5x^4$, mits men overal veelvouden van 3 in de coëfficiënten verwaarlooze; indien namelijk $1 - 4x^3 + 5x^4$ niet volgens den modulus 3 congruent is met een product van functies van lager graad. Een eenvoudiger voorbeeld is, dat $x^2 - x - 1$ volgens den modulus 3 deelbaar moet zijn op $x^8 - 1$; hier is vooreerst zeer gemakkelijk te verifiëeren, dat $x^2 - x - 1$ onherleidbaar is; want waren er deelers, dan zoude $x^2 - x - 1$ voor sommige waarden van $x \equiv 0$, dat is deelbaar door 3 moeten worden, en dit gebeurt niet; men heeft naar behooren $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1) \equiv (x^4 - 1)(4x^4 + 1) = (x^4 - 1)$ $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1) \equiv (x^4 - 1)(2x^2 + 2x + 1)$ $(-x^2 + x + 1)$.

Het bewijs van deze stelling wordt gegeven op dezelfde wijze, als de stelling van FERMAT wordt bewezen. Men beschouwt alle functies van lager graad dan $F(x)$, en daarin de coëfficiënten herleid tot hunne resten naar den modulus p; het aantal dezer functies zoude zijn p^n, want zij zijn begrepen in de formule

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

in welke de n coëfficiënten willekeurig uit de getallen 0, 1, 2, ... $(p - 1)$ kunnen worden gekozen; wij sluiten echter het geval, dat alle a's gelijk nul zouden zijn, uit; dan blijven er $p_n - 1$ functies over, die wij noemen

$$X_1, X_2, \ldots X_{p^n - 1}.$$

Vermenigvuldigen wij deze alle met dezelfde functie $f(x)$, welke ondersteld wordt niet door $F(x)$ deelbaar te zijn, dan

zal geen der producten door $F(x)$ deelbaar zijn; ook zal het verschil van twee der producten nooit door $F(x)$ deelbaar zijn, omdat zulk een verschil altijd gelijk is aan een ander van de producten. Hieruit volgt dan, dat de resten, welke deze producten bij deeling door $F(x)$ overlaten, niet onderscheiden kunnen zijn van de eerst opgestelde rij $X_1, X_2, \ldots$; alleen de volgorde kan anders wezen, zoodat bijvoorbeeld $X_a f(x)$ de rest X_b oplevert. Men kan dit uitdrukken door $p^n - 1$ congruenties van de gedaante

$$X_a f(x) \equiv F(x) . Q + X_b \quad (\text{mod.}\, p).$$

Ook de schrijfwijze

$$X_a f(x) \equiv X_b \quad (\text{mod.}\, p, \ \text{mod.}\ F(x))$$

is zeer doelmatig. Door vermenigvuldiging van al deze congruenties vindt men links en rechts het product van alle functies X; door dit product mag men deelen; er blijft dan over

$$[f(x)]^{p^n - 1} \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, p, \ \text{mod.}\ F(x)).$$

In de stelling, zooals zij boven is aangegeven, is voor $f(x)$ in het bijzonder x genomen; ook is er nog een factor x ingevoerd, om de bijvoeging, dat $f(x)$ niet door $F(x)$ deelbaar wezen mag, overtollig te maken.

Het zoude kunnen schijnen, dat in deze beschouwingen p wel een deelbaar getal mocht wezen; dit is echter niet zoo; men zou dan niet meer door het product $X_1 X_2 \ldots$ mogen deelen, omdat van sommige functies X dan alle coëfficiënten een deeler met p gemeen zouden hebben.

6. Door de kennis van deze stelling zijn wij nu in staat om over het aantal termen van den repetent der resten van eene wederkeerige reeks te oordeelen. Wanneer de noemer $F(x)$ van de voortbrengende breuk naar den modulus p onherleidbaar is, dan is $F(x)$ een deeler van $1 - x^{p^n - 1}$; wordt dus de reeks met de laatste uitdrukking vermenigvuldigd, dan moet zij een eindigen vorm opleveren; dus als elk der coëfficiënten C_0, C_1, C_2, ... wordt afgetrokken van den coëfficiënt, welks rangnummer $p^n - 1$ hooger is, dan zijn de verschillen altijd door p deelbaar. De resten vormen dan een repetent van $p^n - 1$ termen; het kan echter zeer wel gebeuren, dat deze

repetent te splitsen is in eenige kleinere perioden; van deze zal dan het aantal steeds een deeler van $p^n - 1$ moeten zijn.

Wanneer bij herleiding van eene gewone breuk met p tot noemer tot eene repeteerende tiendeelige het aantal cijfers van den repetent niet $p - 1$ is, maar een deeler van $p - 1$, dan wordt dit verklaard door te zeggen, dat 10 eene machtrest is van p. Zoo levert $\frac{1}{13}$ een repetent, niet van twaalf, maar van zes cijfers; dit komt doordat 10 kwadraatrest is van 13, namelijk is $10 = 7^2 - 3.13$. Nu leert de stelling van FERMAT voor dit geval, dat

$$7^{12} - 1 \equiv 0 \pmod{13},$$

dus ook

$$(7^2 - 3.13)^6 - 1 = 10^6 - 1 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Alzoo is nu reeds $10^6 - 1$ door 13 deelbaar, dus kan de repetent niet meer dan zes cijfers hebben.

Hetzelfde verschijnsel is waar te nemen bij de wederkeerige reeksen; men heeft bijvoorbeeld

$$x \equiv (-1 - x)(1 - x - x^2) + (-3 - x)^3 \pmod{7}.$$

Men zou dus kunnen zeggen, dat x eene derde-machtsrest is van $1 - x - x^2$. Hierdoor komt het, dat de wederkeerige reeks, welker voortbrengende breuk $1 - x - x^2$ tot noemer heeft, bij deeling door 7 niet een repetent van $7^2 - 1 = 48$ termen oplevert, maar een van slechts $(7^2 - 1) : 3 = 16$ termen. Immers nu is

$$x^{16} - 1 \equiv (-3 - x)^{48} - 1 \quad [\text{mod. } 7, \text{ mod. } (1 - x - x^2)];$$

en het laatste lid is $\equiv 0$ volgens de behandelde stelling.

Zal de bij den noemer $F(x)$ behoorende wederkeerige reeks eene restenperiode van het maximum aantal termen, $p^n - 1$, opleveren, dan moet $x^r - 1$ voor geen kleiner r dan $p^n - 1$ door $F(x)$ volgens den modulus p deelbaar worden; men kan dit uitdrukken door te zeggen, dat x een primitieve wortel moet zijn van de congruentie

$$u^{p^n - 1} - 1 \equiv 0, \quad [\text{mod. } p, \text{ mod. } F(x)],$$

in welke u eenen onbekenden veelterm in x aanduidt.

De beschouwing van de resten eener wederkeerige reeks geeft dus aanleiding om ook de theorie der machtresten en

der primitieve wortels uit te breiden van geheele getallen op veeltermen.

7. Wij zullen thans nog enkele opmerkingen aanvoeren omtrent het geval van eene wederkeerige reeks, van welke de voortbrengende breuk eenen noemer heeft, die volgens den modulus p niet onherleidbaar is.

Wanneer de noemer het product is van twee functies $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$, die volgens den modulus p geenen deeler gemeen hebben, en deze functies aanleiding geven tot repetenten van r_1 en r_2 termen, dan zal het aantal termen van den repetent nu gelijk worden aan het kleinste gemeene veelvoud k van r_1 en r_2. Immers is $x^{r_1} - 1$ door $\varphi_1(x)$ en $x^{r_2} - 1$ door $\varphi_2(x)$ deelbaar volgens den modulus p; daarom zijn $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ beide deelbaar op $x^k - 1$, en ook haar product. Wanneer bijvoorbeeld $1 - x - x^2$ de noemer is, en p een ondeelbaar getal begrepen in de formule $10n \pm 1$, dan is $1 - x - x^2$ niet onherleidbaar, want de congruentie $1 - x - x^2 \equiv 0$ (mod. p) heeft dan twee wortels, zoodat het eerste lid met een product van twee eerste-machtsfuncties overeenstemt. Deze eerste-machtsfuncties zijn beide deelbaar op $x^{p-1} - 1$, en dus is haar product het ook, omdat zij verschillen. Alzoo levert de wederkeerige reeks dan een repetent van $p - 1$ resten, of een deeler van $p - 1$. Dit werd reeds in de oplossing van N°. 36 der *Wiskundige Opgaven*, deel 5, opgemerkt.

Wanneer de noemer eene macht van eene onherleidbare functie is, dan is het aantal termen van den repetent meestal p-maal zoo groot als wanneer de noemer die functie zelve is. Men heeft namelijk

$$x^r - 1 \equiv 0 \quad [\text{mod.}\, p,\ \text{mod.}\, F(x)],$$

als $F(x)$ die functie is en r het aantal daar bij behoorende restenperiode. Men schrijve hiervoor

$$x^r = 1 + p\,\varphi(x) + F(x)\,\Psi(x).$$

Beide leden tot de p^e macht verheffende, zal men vinden

$$x^{pr} = 1 + F(x)^p\,\Psi(x)^p + \text{door } p \text{ deelbare termen};$$

derhalve:

$$x^{p^r} - 1 \equiv 0 \quad [\text{mod.}\, p, \text{ mod. } F(x)^m]$$

voor alle waarden van m, welke p niet overtreffen.

Om hiernaar het aantal termen van den bij $F(x) = 1 - 4x^3 + 5x^4$ behoorenden repetent voor den modulus 7 te vinden, heeft men vooreerst de ontbinding der functie op te sporen; deze is hier:

$$(1 - 4x^3 + 5x^4) \equiv (1 + x - x^2)(1 + 3x)^2 \quad (\text{mod. } 7).$$

De noemer $1 + x - x^2$ zoude een repetent van $7^2 - 1 = 48$ termen geven (de proef leert, dat er slechts 16 komen). De noemer $1 + 3x$ een van $7 - 1 = 6$, de noemer $(1 + 3x)^2$ dus een van $7 . 6 = 42$. Bij den noemer $F(x)$ behoort dus een repetent van 336 termen, dewijl 336 het kleinste gemeene veelvoud van 16 en 42 is.

8. Ook enkele andere eigenschappen, die betrekking hebben op repeteerende tiendeelige breuken, kunnen worden uitgebreid op wederkeerige reeksen.

Wanneer de noemer van de voortbrengende breuk der reeks $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$ volgens den modulus p onherleidbaar is, en de repetent der resten een even aantal, $2a$, termen heeft, dan zal de som van twee coëfficiënten C, welker aanwijzers a verschillen, door p deelbaar zijn. Want die noemer is dan een deeler van $1 - x^{2a}$ en niet van $1 - x^a$, dus wel van $1 + x^a$; vermenigvuldigt men dus de reeks met $1 + x^a$, dan moet het product een eindige veelterm worden, als men veelvouden van p weglaat; en bij deze vermenigvuldiging worden algemeen de coëfficiënten C_m en C_{m+a} opgeteld.

Is het aantal termen van den repetent $3a$, en de noemer weer onherleidbaar, dan zal de som $C_m + C_{m+a} + C_{m+2a}$ altijd door p deelbaar wezen; want de noemer is dan deelbaar op $1 - x^{3a}$ en niet op $1 - x^a$, dus wel op $1 + x^a + x^{2a}$, zoodat het product van $1 + x^a + x^{2a}$ met de wederkeerige reeks een eindigen veelterm moet opleveren.

Zoo kan men in het algemeen, als de noemer van de voortbrengende breuk volgens den modulus p onherleidbaar is, en de resten naar p een repetent van $m\,n$ termen opleveren, een rechthoek van n rijen elk van m termen opstellen, in welken $m\,n$ achtereenvolgende termen der reeks staan; door optel-

ling van de kolommen vindt men dan veelvouden van p. Als voorbeeld diene de reeks van FIBONACCI 0, 1, 1, 2,...; de voortbrengende breuk is $x:(1-x-x^2)$; naar den modulus 13 repeteeren de resten bij 28; men stelle dus 2×14 of 4×7 of 7×4 of 14×2 achtereenvolgende termen zoo op, dan zijn de sommen der termen in eene kolom altijd deelbaar door 13.

	0	1	1	2	3	5	8
	377	610	987	1597	2584	4181	6765
	377	611	988	1599	2587	4186	6773
13)	29	47	76	123	199	322	521

	13	21	34	55	89	144	233
	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418
	10959	17732	28691	46423	75114	121537	196651
13)	843	1364	2207	3571	5778	9349	15127

	0	1	1	2	3	5	8
	13	21	34	55	89	144	233
	377	610	987	1597	2584	4181	6765
	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418
	11336	18343	29679	48022	77701	125723	203424
13)	872	1411	2283	3694	5977	9671	15648

	0	1	1	2
	3	5	8	13
	21	34	55	89
	144	233	377	610
	987	1597	2584	4181
	6765	10946	17711	28657
	46368	75025	121393	196418
	54288	87841	142129	229970
13)	4176	6757	10933	17690

Men kan bij reeksen der tweede orde eene onafhankelijke formule voor den n^{en} term vinden; door uitkomsten van denzelfden aard als de bovenstaande op die formules toe te passen verkrijgt men zonderlinge rekenkundige stellingen. Zoo

heeft men hier, dat $C_{n+7}+C_{n-7}$ deelbaar is door 13; in formule:

$$\frac{1}{2^{n+6}}\left\{\binom{n+7}{1}+\binom{n+7}{3}5+\binom{n+7}{5}5^2+\ldots\right\}+$$
$$+\frac{1}{2^{n+8}}\left\{\binom{n-7}{1}+\binom{n-7}{3}.\,5+\binom{n-7}{5}.\,5^2+\ldots\right\}$$

is deelbaar door 13.

9. Ten slotte moge nog worden aangestipt, dat de hier voorgedragen beschouwingen een antwoord geven op eene vraag, die door den Heer A. de Rivière gesteld is in den *Intermédiaire des mathématiciens*, en die aldus luidt:

„Si l'on considère tous les arrangements n à n qu'on peut former avec deux objets, il est toujours possible de trouver un arrangement de 2^n termes (formé avec les mêmes deux objets) a_1, a_2, a_3, ..., a_{2^n}, tels que les groupes

$a_1, a_2, \ldots, a_n;\ a_2, a_3, \ldots, a_{n+1};\ \ldots\ a_{2n-1}, a_{2n}, a_1, \ldots, a_{n-2};$
$a_{2n}, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1};$

représentent tous les arrangements n à n dont le nombre est évidemment 2^n. Cette proposition est vérifiée expérimentalement jusqu'à des limites suffisantes pour en présager l'exactitude. Est-elle déjà connue? Pourrait-on en donner une démonstration? Y a-t-il en général plus d'un espèce de solutions et dans ce cas combien?"

Oplossingen, niet alleen voor 2, maar voor p voorwerpen, zijn steeds te vinden, als p ondeelbaar is. Men kan dan steeds eene functie $F(x)$ van den n^{en} graad vinden, die volgens den modulus p onherleidbaar is, en de eenheid tot bekenden term heeft. Door $x^{n-1}: F(x)$ in eene wederkeerige reeks te ontwikkelen en de coëfficiënten door p te deelen vindt men dan een repetent van p^n-1 resten, alle $<p$; n op elkander volgende resten zijn dan steeds de voorstelling van eene verschikking met herhalingen uit de getallen 0, 1, 2,... $(p-1)$; en al die verschikkingen zijn onderscheiden. Men heeft dus alle p^n verschikkingen op eene na voorgesteld, zooals door den Heer de Rivière gedaan werd; de eene ontbrekende verschikking is die uit louter nullen gevormd wordt; om deze op te nemen zette men nog het cijfer 0 voor den repetent.

Hier is aangenomen, dat de repetent van p^n-1 resten zich niet splitst in kleiner perioden; dat er functies $F(x)$ te vinden zijn, voor welke dit uitkomt, is door Serret bewezen; zelfs haar aantal is bepaald, het bedraagt $\frac{1}{2}\Phi(p^n-1)$. Dit is echter niet het aantal der oplossingen van het vraagstuk van de Rivière; voor datzelve bestaan oplossingen, welke door de beschreven methode niet kunnen worden gevonden; dit is bijvoorbeeld het geval met de oplossing 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 bij $p=2$, $n=4$ behoorende. Eene nadere uitwerking van dit onderwerp ligt buiten het bestek van dit opstel.

OVER DE DRIEHOEKEN VAN SCHWARZ

DOOR

W. KAPTEIJN.

Onder driehoeken van SCHWARZ verstaat men driehoeken, waarvan de zijden bogen zijn van cirkels, die loodrecht staan op een vasten cirkel, fondamentalen genoemd. Deze driehoeken, die een gewichtigen rol spelen in de Theorie der FUCHS'sche Functies, stel ik mij voor te bespreken, met het oog op de betrekkingen, die tusschen zekere functies der zijden en de hoeken bestaan. Deze kunnen met behulp der niet-Euclidische meetkunde worden gevonden, zooals POINCARÉ heeft opgemerkt; wij willen echter alleen van de gewone hulpmiddelen gebruik maken. Om hiertoe te geraken transformeeren wij een willekeurigen driehoek in een anderen, waarvan een hoekpunt met het middelpunt van den fondamentalen cirkel samenvalt. Beginnen we met de bespreking van de transformatie, die deze verplaatsing ten gevolge heeft.

Leggen we een rechthoekig coordinatenstelsel door het middelpunt van den fondamentalen cirkel, en stellen we een punt van dezen cirkel voor door $z = x + iy$, het met dit punt geconjugeerde door $z_0 = x - iy$.

Eene lineaire substitutie

$$t = \frac{\alpha z + \beta}{\beta_0 z + \alpha_0},$$

waarin α en β twee maginaire standvastigen, en α_0, β_0 hunne

geconjugeerden voorstellen, transformeert, zooals bekend is, elke figuur in een andere, zoodanig dat de hoeken gelijk blijven, en cirkels in cirkels overgaan.

Door de bijzondere keus der standvastigen echter blijft hier de fondamentale cirkel onveranderd, en gaan cirkels, loodrecht staande op den fondamentalen, over in andere, die dezelfde eigenschap bezitten van loodrecht op den fondamentalen te staan.

Om dit aan te toonen, merk ik op, dat de fondamentale cirkel tot vergelijking heeft

$$z z_0 - 1 = 0.$$

Stelt men hierin

$$z = \frac{-\alpha_0 t + \beta}{\beta_0 t - \alpha},$$

dan is

$$z_0 = \frac{-\alpha t_0 + \beta_0}{\beta t_0 - \alpha_0},$$

en

$$z z_0 - 1 = \frac{(\alpha \alpha_0 - \beta \beta_0)(t t_0 - 1)}{(\beta_0 t - \alpha)(\beta t_0 - \alpha_0)}.$$

Is dus $z z_0 - 1 = 0$, dan is ook $t t_0 - 1 = 0$.

Een cirkel met middelpunt $h + i k$ staat loodrecht op den fondamentalen, als zijne vergelijking is

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2 + k^2 - 1,$$

of

$$x^2 + y^2 - 2 h x - 2 k y + 1 = 0.$$

Stelt men hierin $x + i y = z$, dan wordt deze vergelijking

$$z z_0 - (h - i k) z - (h + i k) z_0 + 1 = 0.$$

Passen we hierop dezelfde substitutie van zooeven toe, dan komt

$$t t_0 - (h' - i k') t - (h' + i k') t_0 + 1 = 0,$$

waarmede het gestelde bewezen is.

Elke substitutie

$$t = \frac{\alpha z + \beta}{\beta_0 z + \alpha_0},$$

bezit in 't algemeen twee dubbele punten z_1 en z_2, die de wortels zijn der vergelijking

$$\beta_0 z^2 + (\alpha_0 - \alpha) z - \beta = 0;$$

zoodat

$$z_1 = \frac{\alpha - \alpha_0}{2\beta_0} + \frac{1}{2\beta_0} \sqrt{(\alpha + \alpha_0)^2 - 4(\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0)},$$

$$z_2 = \frac{\alpha - \alpha_0}{2\beta_0} - \frac{1}{2\beta_0} \sqrt{(\alpha + \alpha_0)^2 - 4(\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0)}.$$

Naar aanleiding hiervan onderscheidt men verschillende soorten van substituties, waarvan de voornaamste zijn de drie volgende.

I. Is $(\alpha + \alpha_0)^2 < 4(\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0)$ dan zijn z_1 en z_2 twee punten, die voldoen aan de voorwaarde

$$z_2 = \frac{1}{z_1^0}\,{}^{1)};$$

want schrijft men de reëele grootheid

$$4(\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0) - (\alpha + \alpha_0)^2 = M,$$

dan is

$$z_1 = \frac{\alpha - \alpha_0 + i\sqrt{M}}{2\beta_0},$$

$$z_2 = \frac{\alpha - \alpha_0 - i\sqrt{M}}{2\beta_0},$$

zoodat

$$\frac{1}{z_1^0} = \frac{2\beta}{\alpha_0 - \alpha - i\sqrt{M}} = \frac{2\beta(\alpha_0 - \alpha + i\sqrt{M})}{-4\beta\beta_0} = z_2.$$

De dubbele punten zijn dus invers ten opzichte van den fondamentalen cirkel gelegen; deze substitutie kan nu gemakkelijk herleid worden tot den vorm

$$\frac{t - z_1}{t - z_2} = K \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

waarin K eene imaginaire grootheid met modulus één voorstelt.

Wanneer men aanneemt $K = e^{i\Phi}$ (fig. 1) dan ziet men dus, dat een cirkel $z_1 A z_2$, door de dubbele punten gaande, overgaat in een anderen, die met den eersten een hoek Φ vormt;

---

1) z_1^0 is de geconjugeerde waarde van z_1.

want kiest men z in de nabijheid van z_1 op z_1 A z_2, dan is t nabij z_1 gelegen, zoodat

$$dt = e^{i\Phi} dz,$$

waaruit volgt

$$arg.\ dt = \Phi + arg.\ dz.$$

De substitutie heet in dit geval elliptisch.

II. Is $(\alpha + \alpha_0)^2 = 4(\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0)$, dan vallen z_1 en z_2 samen. In dit geval is

$$z_1 = \frac{\alpha - \alpha_0}{2\beta_0} = z_2,$$

dus

$$z_1 z_1{}^0 = -\frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{4\beta\beta_0} = 1,$$

waaruit volgt dat de samenvallende punten op den fondamentalen cirkel liggen. De substitutie heet in dit geval parabolisch en kan steeds herleid worden tot den vorm

$$\frac{1}{t - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + k.$$

III. Is $(\alpha + \alpha_0)^2 > 4(\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0)$, dan liggen z_1 en z_2 op den omtrek van den fondamentalen cirkel. Men heeft dan

$$z_1 = \frac{\alpha - \alpha_0 + \sqrt{M}}{2\beta_0},$$

$$z_2 = \frac{\alpha - \alpha_0 - \sqrt{M}}{2\beta_0},$$

waarin M eene reëele grootheid voorstelt.

Men vindt nu gemakkelijk $z_1 z_1{}^0 = z_2 z_2{}^0 = 1$, en kan deze substitutie herleiden tot den vorm

$$\frac{t - z_1}{t - z_2} = K\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

waarin K eene reëele positieve grootheid voorstelt. Een punt A (fig. 2) ondergaat in dit geval eene verplaatsing op den cirkel, die door A en de beide dubbele punten gebracht wordt; want kiest men nu z in de nabijheid van z_1, dan zal

$$dt = K\,dz,$$

dus $arg.\ dt = arg.\ dz$.

Elke cirkel, door de dubbele punten gaande, gaat dus bij

deze soort substitutie, die men hyperbolisch noemt, in zichzelf over.

Uit het voorgaande blijkt, dat wanneer de dubbele punten van eene hyperbolische substitutie gegeven zijn, deze substitutie op eene standvastige na bepaald is. Geeft men dus nog twee overeenstemmende punten, dan is zij geheel bepaald.

Helderen we dit op met een voorbeeld, dat later toepassing zal vinden.

Zijn de uiteinden eener middellijn, z_1 en $-z_1$, de dubbele punten eener hyperbolische substitutie, die een punt A dezer middellijn in den oorsprong overbrengt, dan is deze substitutie

$$\frac{t-z_1}{t+z_1}=K.\frac{z-z_1}{z+z_1},$$

waarin K bepaald wordt door de voorwaarde, dat $t=0$ als $z=A$, zijnde A de imaginaire waarde, behoorende bij het punt A.

Hieruit volgt

$$K=\frac{z_1+A}{z_1-A}.$$

Schrijven we de substitutie in den vorm

$$t=\frac{-z_1(K+1)z+z_1^2(K-1)}{(K-1)z-z_1(K+1)},$$

en voeren nu de gevonden waarde van K in, dan is

$$K+1=\frac{2z_1}{z_1-A},\ K-1=\frac{2A}{z_1-A};$$

zoodat

$$t=\frac{z_1^2(-z+A)}{Az-z_1^2}.$$

Merken we nu op, dat z_1 hetzelfde argument heeft als A, dan is

$$z_1=\frac{A}{mod.\ A},$$

dus

$$z_1^2=\frac{A^2}{AA_0}=\frac{A}{A_0}.$$

Stelt men dit in de gevonden substitutie, dan komt

$$t=\frac{-z+A}{A_0z-1}.$$

Keeren we nu terug tot een driehoek A B C van SCHWARZ, dan zien we, dat door de laatste substitutie deze kan worden getransformeerd in een anderen, waarvan het hoekpunt A in den oorsprong van coordinaten ligt, terwijl de aangrenzende zijden in rechte lijnen overgaan.

Bij deze substitutie blijven, zooals we reeds opmerkten, de hoeken standvastig, maar ook blijven de grootheden

$$L = 2\int \frac{mod.\, d\,z}{1 - z\,z_0} = 2\int \frac{d\,s}{1 - r^2},$$

$$S = 4\int\int \frac{r\,d\,r\,d\,\theta}{(1 - r^2)^2},$$

waarin $z = r\,e^{i\theta}$ en $d\,s$ het element van een boog voorstelt, onveranderd. Men ziet dit terstond in, als men opmerkt dat uit

$$t = \frac{\alpha\,z + \beta}{\beta_0\,z + \alpha_0}, \text{ of } z = \frac{-\alpha_0\,t + \beta}{\beta_0\,t - \alpha},$$

volgt

$$z\,z_0 - 1 = \frac{(\alpha\,\alpha_0 - \beta\,\beta_0)(t\,t_0 - 1)}{(\beta_0\,t - \alpha)(\beta\,t_0 - \alpha_0)}$$

en

$$\frac{d\,z}{d\,t} = \frac{\alpha\,\alpha_0 - \beta\,\beta_0}{(\beta_0\,t - \alpha)^2},$$

of

$$mod.\,\frac{d\,z}{d\,t} = \frac{\alpha\,\alpha_0 - \beta\,\beta_0}{(\beta_0\,t - \alpha)(\beta\,t_0 - \alpha_0)}.$$

Ik kom nu tot de berekening van de L van een willekeurigen boog A B, die loodrecht op den fondamentalen cirkel staat. Om dit te doen, breng ik door eene hyperbolische substitutie A in den oorsprong over, dan komt B ergens in B′. Dit punt wordt bepaald door de gevonden substitutie nl.

$$B' = \frac{A - B}{A_0\,B - 1}.$$

Nu is voor eene rechte lijn uit den oorsprong getrokken, wier lengte is

$$b = mod.\ B',$$

$$L = 2\int_0^b \frac{d\,x}{1 - x^2} = l\,g\,\frac{1 + b}{1 - b}.$$

Hieruit volgt

$$e^L = \frac{1+b}{1-b}, \qquad e^{-L} = \frac{1-b}{1+b},$$

$$c\,h\,L = \frac{1+b^2}{1-b^2}, \qquad s\,h\,L = \frac{2\,b}{1-b^2};$$

dus is

$$c\,h\,L\,(O\,B') = \frac{1+B'\,B'_0}{1-B'\,B'_0}.$$

Substituteert men hierin

$$B' = \frac{A-B}{A_0\,B-1}, \quad B'_0 = \frac{A_0-B_0}{A\,B_0-1},$$

dan komt

$$c\,h\,L(A\,B) = c\,h\,L(O\,B') = \frac{(1+A\,A_0)(1+B\,B_0)-2\,(A\,B_0+A_0\,B)}{(1-A\,A_0)(1-B\,B_0)}.$$

Hiermede is dus de hyperbolische cosinus van de L eens boogs A B op gemakkelijke wijze in de coordinaten van de uiteinden van dezen boog uitgedrukt.

Denken we ons nu een willekeurigen driehoek A B C (fig. 3) van Schwarz, vooreerst door eene hyperbolische substitutie getransformeerd tot het hoekpunt C in den oorsprong ligt, en daarna door eene elliptische substitutie zoodanig gedraaid, dat de zijde C B langs de x-as valt, dan weten we dat in dezen nieuwen driehoek de hoeken en de L's der zijden dezelfde zijn als in den oorspronkelijken driehoek.

De L's gelijk zijnde, zoo zijn ook de hyperbolische cosinus der L's gelijk, zoodat we verkrijgen, daar $B_0 = B$,

$$c\,h\,L\,(A\,B) = c\,h\,(c) = \frac{(1+A\,A_0)(1+B^2)-2\,B(A+A_0)}{(1-A\,A_0)(1-B^2)},$$

$$c\,h\,L(B\,C) = c\,h\,(a) = \frac{1+B^2}{1-B^2}, \quad s\,h\,(a) = \frac{2\,B}{1-B^2},$$

$$c\,h\,L(C\,A) = c\,h\,(b) = \frac{1+A\,A_0}{1-A\,A_0}, \quad s\,h\,(b) = \frac{2\,mod.\,A}{1-A\,A_0},$$

en bijgevolg

$$c\,h\,(c) = c\,h(a)\,.\,c\,h(b) - \frac{2\,B}{1-B^2}\,.\,\frac{2\,mod.\,A\,.\,cos\,C}{1-A\,A_0},$$

want

$$A = mod.\, A\,(\cos C + i \sin C),$$
$$A_0 = mod.\, A\,(\cos C - i \sin C).$$

Hiermede vindt men dan de fondamentale betrekking

$$c\,h\,(c) = c\,h\,(a)\,.\,c\,h\,(b) - s\,h\,(a)\,.\,s\,h\,(b)\,.\,\cos C,$$

waaruit men, evenals in de bol-driehoeksmeting, alle andere betrekkingen kan afleiden.

Men vindt bijv.

$$\frac{\sin A}{s\,h\,(a)} = \frac{\sin B}{s\,h\,(b)} = \frac{\sin C}{s\,h\,(c)},$$
$$\coth\,(a)\,.\,s\,h\,(b) = \cot A\,.\,\sin C + ch\,(b)\,.\,\cos C,$$
$$\cos C = -\cos A\,.\,\cos B + \sin A\,.\,\sin B\,.\,c\,h\,(c).$$

Ligt een hoekpunt, bijv. C, op den omtrek van den fondamentalen cirkel, dan worden (a) en (b) oneindig, dus ook $c\,h\,(a)$, $s\,h\,(a)$, $c\,h\,(b)$ en $s\,h\,(b)$, terwijl $C = 0$; de zijde (c) berekent men dan uit de laatste formule, die alsdan wordt

$$c\,h\,(c) = \frac{1 + \cos A\,.\,\cos B}{\sin B\,.\,\sin C}.$$

Is de driehoek rechthoekig, dan vindt men tien formules, die volmaakt overeenkomen met die voor rechthoekige bol-driehoeken.

Berekent men de S van een driehoek, dan vindt men (zie Verhandelingen Congres Groningen)

$$S = \pi - P,$$

waarin P de som der hoeken van den driehoek voorstelt.

Denken we ons nu, dat een driehoek A B C getransformeerd wordt door middel van eene lineaire substitutie

$$\frac{t - t_1}{t - t_2}\,.\,\frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\,.\,\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3},$$

waarin z_1, z_2, z_3, drie willekeurige punten op den omtrek van den fondamentalen cirkel voorstellen, en t_1, t_2, t_3, drie willekeurige punten op de reëele as; dan vindt men gemakkelijk, dat de driehoek overgaat in een anderen, die met den eersten gelijke hoeken heeft, en wiens zijden bestaan uit cirkelbogen, die allen hunne middelpunten op de reëele as hebben. Daarbij gaat dan de integraal

$$2 \int \frac{mod.\, d\, z}{1 - z\, z_0} \text{ over in } \int \frac{mod.\, d\, t}{y}.$$

Verstaan we dus in dezen nieuwen driehoek A B C onder de L's der zijden de integralen van den laatsten vorm, dan gelden ook alle gevonden formulen voor dezen driehoek.

Willen we nu een dergelijken driehoek construeeren, wanneer de de hoeken gegeven zijn, dan kunnen we de L's der overstaande zijden berekenen. Nemen we dan een willekeurig punt C aan (fig. 4), en beschrijven een cirkelboog door dit punt, waarvan het middelpunt op de x-as gelegen is, bijv. in den voet O der loodlijn uit C op de reëele as neergelaten; dan komt de constructie neer op de bepaling van een punt B op dezen boog. zoodanig dat

$$L\,(\mathrm{C\,B}) = (a).$$

Nu is

$$L\,(\mathrm{C\,B}) = \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\, d\, \theta}{r \sin \theta} = lg.\, ctg \frac{\beta}{2} = (a).$$

Hieruit volgt

$$c\, h\, (a) = \frac{1}{\sin \beta},$$

of

$$\sin \beta = \frac{1}{c\, h\, (a)} = \frac{\cos A + \cos B \,.\, \cos C}{\sin B \,.\, \sin C}.$$

Hieruit bepale men dus β, en construeere daarmede het punt B. Verder trekke men door C en B cirkelbogen met middelpunten in de x-as gelegen, zoodanig dat deze in de punten C en B de gegeven hoeken van denzelfden naam vormen.

Wanneer men door stereographische projectie een bol-driehoek op het aequatorvlak afbeeldt, verkrijgt men een driehoek, die begrensd wordt door cirkels, die door de uiteinden van eene of andere middellijn gaan. Op gelijke wijze als in het voorgaande kunnen alle betrekkingen tusschen zijden en hoeken van den bol-driehoek uit de overeenkomende eigenschappen van de genoemde driehoeken worden afgeleid.

In aansluiting met het voorgaande, willen we de grondformule voor de driehoeken van Schwarz nog op andere wijze ontwikkelen en enkele daarmede samenhangende vraagstukken bespreken. Beginnen we daartoe met een paar voorbereidende stellingen te bewijzen.

I. Door eene hyperbolische substitutie

$$\frac{t-a}{t-a'}=H\frac{z-a}{z-a'},$$

wordt een punt C op den boog, die loodrecht op den fondamentalen cirkel staat en door de punten a en a' gaat, getransformeerd in een punt C'. De L van den boog C C' gemeten langs den genoemden cirkel is gelijk $lg\ H$.

Nemen we ter vereenvoudiging de lijn, die door het middelpunt van den fondamentalen cirkel en door het midden van boog $a\,a'$ gaat, als x-as aan, en het midden van den boog $a\,a'$ als het punt C. Stellen we verder $a=e^{i\alpha}$ en noemen h en r het middelpunt en den straal van den boog $a\,a'$, dan is

$$h=\frac{1}{\cos\alpha},\qquad r=tg\,\alpha,$$

terwijl uit

$$\frac{C'-a}{C'-a'}=H\frac{C-a}{C-a'}$$

volgt

$$C'=\frac{(H^2+1)\cos\alpha-i\,(H^2-1)\sin\alpha}{H^2+2\,H\sin\alpha+1};$$

dus

$$tg\,(arg.\,C')=-\,tg\,\theta=-\,\frac{H^2-1}{H^2+1}\,r.$$

Nu is de vergelijking van den cirkel $a\,a'$

$$\rho^2-2\,h\,\rho\cos\theta+1=0,$$

derhalve

$$d\rho=\frac{r\,\rho\,d\theta}{h\cos\theta-\rho},$$

$$d\,s=d\theta\sqrt{\rho^2+\frac{d\rho^2}{d\theta^2}}=\frac{r\,\rho\,d\theta}{h\cos\theta-\rho},$$

en

$$L(C\,C') = 2\int_0^\theta \frac{d\,s}{1-\rho^2} = r\int_0^\theta \frac{d\,\theta}{h^2\cos^2\theta - 1} = \frac{1}{2}\,lg\,\frac{r+tg\,\theta}{r-tg\,\theta}.$$

Stelt men hierin de gevonden waarde van $tg\,\theta$, dan verkrijgt men

$$L = L\,(C\,C') = \frac{1}{2}\,lg\,H^2 = lg\,H,$$

waaruit volgt

$$ch\,L = \frac{H^2+1}{2\,H}, \qquad sh\,L = \frac{H^2-1}{2\,H},$$

$$ch\,\frac{L}{2} = \frac{H+1}{2\sqrt{H}}, \qquad sh\,\frac{L}{2} = \frac{H-1}{2\sqrt{H}}.$$

II. Twee cirkels loodrecht op den fondamentalen, welke dezen in de punten $a\,a$ en $b\,b'$ ontmoeten, snijden elkaar onder een hoek C, waarvan de cosinus gelijk is aan

$$\frac{2\,(a\,a'+b\,b')-(a+a')\,(b+b')}{(a-a')\,(b-b')}.$$

Een cirkel, loodrecht op den fondamentalen met middelpunt $h+i\,k$, heeft tot vergelijking

$$z\,z_0 - (h-i\,k)\,z - (h+i\,k)\,z_0 + 1 = 0.$$

Gaat deze door de punten a en a', en merkt men op, dat $a\,a_0 = a'\,a'_0 = 1$ en dat derhalve

$$a_0 = \frac{1}{a}, \qquad a'_0 = \frac{1}{a'},$$

dan vindt men gemakkelijk

$$h+i\,k = \frac{2\,a\,a'}{a+a'}, \qquad h-i\,k = \frac{2}{a+a'};$$

waaruit volgt, zoo men den straal van dezen cirkel noemt r,

$$r^2 = h^2+k^2-1 = -\,\frac{(a-a')^2}{(a+a')^2},$$

en

$$r = -\,i\,\frac{a-a'}{a+a'}.$$

Stellen we nu door $h'+i\,k'$ en r' het middelpunt en den straal van den cirkel door b en b', door d den afstand van de beide middelpunten en door $180^\circ - C$ den hoek tusschen

de beide stralen uit C naar deze middelpunten getrokken voor, dan is

$$cos\, C = \frac{d^2 - r^2 - r'^2}{2\, r\, r'}.$$

Berekent men deze uitdrukking met behulp van de bovenstaande formulen, waaruit men terstond de waarden van r'^2 en r' kan afleiden, dan vindt men

$$cos\, C = \frac{2\,(a\,a' + b\,b') - (a + a')\,(b + b')}{(a - a')\,(b - b')}.$$

Beschouwen we nu een driehoek A B C van Schwarz en onderstellen, dat de boog A C den fondamentalen cirkel in de punten a en a' snijdt, terwijl de hyperbolische substitutie

$$\frac{t - a}{t - a'} = H\,\frac{z - a}{z - a'} \quad (S)$$

het punt A naar een punt A′ verplaatst, zoodanig dat $L\,(A\,C) = L\,(C\,A')$. Op gelijke wijze onderstellen we, dat de cirkel C B den fondamentalen in de punten b en b' ontmoet, en eene hyperbolische substitutie

$$\frac{t - b}{t - b'} = K\,\frac{z - b}{z - b'} \quad (S'),$$

een punt B′ op den cirkel C B verplaatst naar het punt B, zoodanig dat $L\,(C\,B) = L\,(B'\,C)$. Verbindt men verder de punten A′ en B′ door een cirkel, loodrecht op den fondamentalen, en neemt aan, dat de substitutie S' het punt A′ verplaatst naar een punt A″, dan is $L\,(B'\,A') = L\,(B\,A'')$, terwijl bij deze transformatie de hoek C′ B′ A′ onveranderd blijft.

Nu is gemakkelijk in te zien, dat de elliptische substitutie

$$\frac{t - C}{t - C_0} = e^{i\,\pi}\,\frac{z - C}{z - C_0},$$

het punt A naar A′ en B naar B′ verplaatst. Hieruit volgt, dat de driehoeken A B C en A′ B′ C gelijke hoeken hebben. In verband met het voorgaande blijkt dus, dat de boog B A″ het verlengde is van den boog A B, en voorts dat

$$L\,(B'\,A') = L\,(A\,B) = L\,(B\,A'').$$

De substitutie $S\,S'$, dat is de twee substituties S en S'

achtereenvolgens toegepast op A, verplaatst dus dit punt naar A'', terwijl $L(AB) = L(BA'')$.

Noemt men nu $L(BC) = (c)$, $L(AC) = (b)$ en $L(AB) = (a)$, dan weet men uit de eerste stelling, dat

$$ch(a) = \frac{K+1}{2\sqrt{K}}, \quad sh(a) = \frac{K-1}{2\sqrt{K}},$$

$$ch(b) = \frac{H+1}{2\sqrt{H}}, \quad sh(b) = \frac{H-1}{2\sqrt{H}},$$

en, zoo men X den vermenigvuldiger noemt van de samengestelde substitutie SS'

$$ch(c) = \frac{X+1}{2\sqrt{X}}, \quad sh(c) = \frac{X-1}{2\sqrt{X}}.$$

Berekenen we derhalve den vermenigvuldiger X. Schrijft men de samengestelde substitutie SS'

$$t = \frac{pz+q}{rz+s},$$

dan vindt men

$$\begin{aligned}
p &= (a'H - a)(b'K - b) - bb'(H-1)(K-1),\\
q &= -aa'(b'K - b)(H-1) + bb'(aH - a')(K-1),\\
r &= (a'H - a)(K-1) - (bK - b')(H-1),\\
s &= -aa'(H-1)(K-1) + (aH - a')(bK - b').
\end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
p + s = (aH - a')(bK - b') + (a'H - a)(b'K - b) -\\
- (aa' + bb')(H-1)(K-1)
\end{aligned}$$

$$ps - qr = (a-a')^2 (b-b')^2 HK.$$

Nu is

$$\begin{aligned}
2(aH - a')(bK - b') + 2(a'H - a)(b'K - b) =\\
= (a-a')(b-b')(H+1)(K+1) + (a+a')(b+b') .\\
. (H-1)(K-1),
\end{aligned}$$

derhalve

$$\begin{aligned}
2(p+s) = (a-a')(b-b')(H+1)(K+1) - [2(aa' + bb') -\\
- (a+a')(b+b')](H-1)(K-1),
\end{aligned}$$

of, ten gevolge van de tweede stelling

$$\frac{2(p+s)}{(a-a')(b-b')} = (H+1)(K+1) - (H-1)(K-1)\cos C.$$

Volgens FORSYTH's Theory of Functions p. 514 is, zoo we de gevraagde vermenigvuldiger X noemen,

$$\frac{X+1}{2\sqrt{X}}=\frac{2(p+s)}{4\sqrt{ps-qr}},$$

dus komt

$$\frac{X+1}{2\sqrt{X}}=\frac{(H+1)(K+1)}{4\sqrt{HK}}-\frac{(H-1)(K-1)}{4\sqrt{HK}}\cos C,$$

of eindelijk met behulp van de bekende notaties

$$ch(c)=ch(a).\,ch(b)-sh(a).\,sh(b).\cos C.$$

Voegen we hieraan nog toe eenige vraagstukken, die we ontleenen aan eene Verhandeling van den heer STOUFF [1]), waarin men de oplossingen zonder bewijs vindt.

1. De meetkunstige plaats te vinden van de dubbele punten der elliptische substituties, die den boog $a\,a'$ in $b\,b'$ overbrengen.

Zij de substitutie, die dit bewerkt,

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta}=K\frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Vervangt men hierin z door a en t door b, daarna z door a' en t door b', dan komt na eliminatie van K

$$(a'b+\alpha\beta)(a-b)+(ab+\alpha\beta)(b'-a')+(\alpha+\beta)(a'b-ab')=0.$$

Is de substitutie elliptisch, dus $\beta=\frac{1}{\alpha_0}$ dan volgt hieruit:

$$(a'b-ab')\,\alpha\,\alpha_0+(a-b-a'+b')\,\alpha+[a'b'(a-b)-$$
$$-ab(a'-b')]\,\alpha_0+(a'b-ab')=0.$$

Deze vergelijking stelt voor een cirkel, loodrecht op den fondamentalen en gaande door het snijpunt van de beide cirkels $a\,a'$ en $b\,b'$.

2. De meetkunstige plaats te vinden van alle punten, waarvan de loodrechte bogen, op $a\,a'$ en $b\,b'$ neêrgelaten, gelijke L's bezitten.

Bepalen we daartoe de L van den loodrechten boog, uit een punt M op $a\,a'$ neêrgelaten. De substitutie

$$t=\frac{-z+M}{M_0 z-1}$$

1) Sur la transformation des fonctions fuchsiennes. Ann. Éc. Norm. 1888.

verplaatst M naar het middelpunt O van den fondamentalen cirkel, en de voet van de loodlijn naar een punt C. Noemt men de punten, waarin a en a' overgaan, p en q, dan vindt men

$$p = \frac{M - a}{M_0 a - 1}, \quad q = \frac{M - a'}{M_0 a' - 1},$$

$$C = i\sqrt{p\,q}\,\frac{\sqrt{p} - i\sqrt{q}}{\sqrt{p} + i\sqrt{q}},$$

$$s\,h\,L(O\,C) = \frac{2\,mod.\,C}{1 - C\,C_0} = \frac{i(p+q)}{p-q} = i\,\frac{(a+a')(M\,M_0+1) - 2(M_0\,a\,a' + M)}{(a-a')(1 - M\,M_0)}.$$

Leidt men hieruit af de L van den loodrechten boog uit M op $b\,b'$ neêrgelaten, dan vindt men voor de gevraagde meetkundige plaats

$$(a'\,b - a\,b')\,M\,M_0 + (a - b - a' + b')\,M + [a'\,b\,(a - b) -$$
$$- a\,b\,(a' - b')]\,M_0 + a'\,b - a\,b' = 0,$$

dat is dezelfde cirkel van het vorig vraagstuk.

3. Wat is de vergelijking van den cirkel, die loodrecht staat op $a\,a'$, $b\,b'$ en den fondamentalen cirkel.

De gegeven cirkels $a\,a'$ en $b\,b'$ hebben tot vergelijkingen

$$(a + a')\,z\,z_0 - 2\,z - 2\,a\,a'\,z_0 + a + a' = 0,$$
$$(b + b')\,z\,z_0 - 2\,z - 2\,b\,b'\,z_0 + b + b' = 0.$$

Voor den gevraagde cirkel vindt men

$$(a\,a' - b\,b')\,z\,z_0 - (a + a' - b - b')\,z - [a\,a'\,(b + b') -$$
$$- b\,b'\,(a + a')]\,z_0 + a\,a' - b\,b' = o.$$

4. Bepaling van een punt M, zoodanig gelegen, dat alle op den fondamentalen cirkel loodrechte bogen, door dit punt gebracht, door de cirkels $a\,a'$ en $b\,b'$ middendoor gedeeld worden.

Verplaatst men M naar het middelpunt van den fondamentalen cirkel door de substitutie

$$t = \frac{-z + M}{M_0\,z - 1},$$

en stelt men, evenals boven, dat de punten a en a' in p en q, b en b' in p' en q' overgaan, dan moet

$$p + q' = q + p' = 0,$$

of

$$(M\,M_0 + 1)\,(a + b') - 2\,M - 2\,a\,b'\,M_0 = 0,$$

$$(M M_0 + 1)(a' + b) - 2M - 2a'bM_0 = 0.$$

Stelt men

$$\frac{a - a' - b + b'}{a'b - ab'} = \theta,$$

dan komt vooreerst

$$M_0 = \frac{\theta}{\theta_0} M,$$

en verder

$$M^2 + \frac{2}{\theta} M + \frac{\theta_0}{\theta} = 0,$$

waaruit volgt

$$M : M_0 : 1 + M M_0 : 1 - M M_0 = \theta_0 : \theta : -2 : -2\sqrt{1 - \theta\theta_0}.$$

5. Bepaling van de L van den loodrechten boog door het punt M gaande en eindigende in de beide bogen $a\,a'$ en $b\,b'$.

Noemen we de L van den loodrechten boog, uit M op $a\,a'$ neêrgelaten, eenvoudig L, dan is

$$s\,h\,L = i \,.\, \frac{(a + a')(M M_0 + 1) - 2(M_0 a a' + M)}{(a - a')(1 - M M_0)},$$

waaruit na herleiding volgt

$$c\,h\,(2L) = \frac{(a + a')(b + b') - 2(a a' + b b')}{(a - a')(b - b')}.$$

KLEINERE MEDEDEELINGEN.

NIEUW BEWIJS VAN HET THEOREMA VAN TAYLOR,

DOOR

A. JEKEL.

De kromme

$$y = f(x)$$

hebbe een continu verloop tusschen de grenzen x en $x + h$; indien verder de afgeleiden van $f(x)$ tusschen deze grenzen continu en eindig zijn, laat zich gemakkelijk bewijzen, dat de betrekking geldt

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x + \vartheta h), \quad \ldots\ldots \quad \text{(I.)}$$

waarin $\vartheta \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$.

De vorm $f'(x + \vartheta h)$ geeft 't overschot van de waarde van $f(x + h)$, indien men bij den eersten term afbreekt; zij geeft ons een uitstekend middel aan de hand ter bepaling van convergentie. Juist in deze zoogenaamde rest ligt de groote kracht van de reeks van Taylor. Wij willen dan ook van dezen vorm uitgaan, waarin eigenlijk het geheele theorema ligt opgesloten.

De waarde $f'(x + \vartheta h)$ is weder eene nieuwe functie van

$x + \vartheta h$; zij deze gelijk aan $\Phi(x + \vartheta' h)$, dan kan men, in verband met (I), schrijven

$$f'(x + \vartheta h) = \Phi(x + \vartheta' h) = \Phi(x) + \vartheta' h \Phi'(x + \vartheta_1 h),$$

waarin $\vartheta' \gtrless {0 \atop 1}$.

Op dezelfde wijze als hierboven, geeft de ontwikkeling van $\Phi'(x + \vartheta_1 h)$

$$\Phi'(x + \vartheta_1 h) = \psi(x + \vartheta'_1 h) = \psi(x) + \vartheta'_1 h \psi'(x + \vartheta_2 h),$$

waarin weder $\vartheta'_1 < \vartheta' \gtrless {0 \atop 1}$.

Door invoering van nog meer nieuwe functiën $\chi(x)$, $\zeta(x)$, ... $\xi(x)$ en zoo voort gaat vergelijking (I) na achtereenvolgende substitutiën over in

$$f(x+h) = f(x) + h\Phi(x) + \vartheta' h^2 \psi(x) + \vartheta' \vartheta'_1 h^3 \chi(x) +$$
$$+ \vartheta' \vartheta'_1 \vartheta'_2 h^4 \zeta(x) + \ldots + \vartheta' \vartheta'_1 \vartheta'_{n-1} h^{n+1} \xi'(x + \vartheta_n h). \quad \text{(II)}$$

Uit den aard der bewerkingen volgt de ongelijkheid

$$\vartheta'_{n-1} < \vartheta'_{n-2} < \vartheta'_{n-3} \ldots < \vartheta'_2 < \vartheta'_1 < \vartheta' \gtrless {0 \atop 1}.$$

Breekt men bij den n^{den} term af, dan blijft er nog een rest over ter completeering van $f(x+h)$; deze wordt, blijkens het tweede lid van vergelijking (II), gegeven door

$$R = \vartheta' \vartheta'_1 \ldots \vartheta'_{n-1} h^{n+1} \xi'(x + \vartheta_n h),$$

of $\vartheta_n = \theta$ stellende, door

$$R + \vartheta' \vartheta'_1 \ldots \vartheta'_{n-1} h^{n+1} \xi'(x + \theta h).$$

Er is dus rechtstreeks aangetoond, dat iedere willekeurige functie, welke tusschen x en $x+h$ continu voortloopt, en wier afgeleiden voor waarden tusschen deze grenzen continu en eindig zijn, kan ontwikkeld worden in een reeks volgens de opklimmende machten van h. Tevens is deze reeks in een eindigen vorm gebracht.

De waarden van $\Phi(x)$, $\psi(x)_1$ en zoo voort en van de verschillende ϑ's moeten nu nog bepaald worden.

Ter oplossing van de eerste vraag, make men gebruik van de boven gestelde vergelijkingen, te weten

$$f'(x + \vartheta h) = \Phi(x + \vartheta' h), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$
$$\Phi'(x + \vartheta_1 h) = \psi(x + \vartheta'_1 h), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$
$$\psi(x + \vartheta_2 h) = \chi(x + \vartheta'_2 h), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

en zoo voort.

Uit (α) volgt

$$\lim_{h=0} f'(x+\vartheta h) = \lim_{h=0} \varphi(x+\vartheta' h),$$

of

$$f'(x) = \varphi(x).$$

Evenzoo geven β en γ

$$\varphi'(x) = \psi(x), \quad \psi'(x) = \chi(x);$$

door achtereenvolgende differentiatie vindt men nog

$$\varphi(x) = f'(x), \quad \psi(x) = f''(x), \quad \chi(x) = f'''(x), \text{ enz.}$$

en

$$f^n(x) = \xi(x),$$

of

$$f^n(x+\theta h) = \xi(x+\theta h),$$
$$f^{n+1}(x+\theta h) = \xi'(x+\theta h).$$

Vergelijking (α) geeft ons nog een middel aan de hand om op eene andere wijze aan te toonen, dat $f'(x) = \varphi(x)$.

Uit (I) toch volgt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\vartheta h) = f'(x) + \lambda, \quad . \; . \; (\alpha')$$

waarin λ eene grootheid is, die voor de limiet verdwijnt; verder is

$$f'(x+\vartheta h) = \varphi(x) + \vartheta' h \varphi'(x+\vartheta_1 h). \; . \; . \; . \; (\alpha'')$$

Neemt men nu van beide leden der vergelijkingen (α') en (α'') de limiet voor $h=0$, dan zal ook de verlangde uitkomst te voorschijn komen.

Een en ander te zamen nemend, verkrijgen we dus tot voorloopige uitkomst de vergelijking

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \vartheta' h^2 f''(x) + \vartheta' \vartheta'_1 h^3 f'''(x) + \dots$$
$$\dots + \vartheta' \vartheta'_1 \dots \vartheta'_{n-1} h^{n+1} f^{n+1}(x+\theta h), \; . \; . \; . \; \text{(III)}$$

waarin nu nog ϑ', ϑ'_1, ... ϑ'_{n-1} moeten bepaald worden.

De volgende beschouwing geeft ons een middel aan de hand, het bedrag dezer grootheden te leeren kennen.

Indien eenige functie $F(x+h)$ van den vorm zij

$$F(x+h) = (\mu)^k,$$

waarin (μ) eene zekere functie van x, dan zal indien de eerstvolgende $n+1$ afgeleiden eindig, de verdere $=0$ zijn, de gelijkheid bestaan

$$F^{n+1}(x+h) = F^{n+1}(x+\beta h).$$

Immers uit

$$F(x+h)=(\mu)^k,$$

volgt voor $F(x+\beta h)$

$$F(x+\beta h)=(\mu, l)^k,$$

waarin l met β samenhangt en voor $\beta=1$ verdwijnt.

Na $(n+1)$-voudige differentiatie volgt dan de betrekking

$$F^{n+1}(x+h)=F^{n+1}(x+\beta h),$$

welke te bewijzen was.

Men stelle nu nog, om tot ons doel te geraken, de volgende vergelijking op

$$\Phi(x+h)=\Phi(x)+h\,\Phi'(x)+\vartheta' h^2\,\Phi''(x)+\ldots$$
$$\ldots+\vartheta'\vartheta'_1\ldots\vartheta'_{n-1}h^{n+1}\,\Phi^{n+1}(x+\theta h), \quad . . \text{(III}a\text{)}$$

welke aan dezelfde voorwaarden gebonden zij als vergelijking (III).

Aan x worde eene zoodanige waarde x_0 gegeven, dat:

1°. elke afgeleide van $f(x+h)$ en $\Phi(x+h)$ tot en met de $(n+1)^{ste}$ eindig zij, en

$$f^{n+2}(x+h)=0,\quad \Phi^{n+2}(x+h)=0,$$

en zoo voort.

2°. zoowel $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, en zoo voort, als $\Phi(x_0)$, $\Phi'(x_0)$, ... $\Phi^{n+1}(x_0+\theta h)$, de waarden 0 hebben,

dan volgt onmiddellijk uit (III) en (IIIa)

$$\frac{f(x_0+h)}{\Phi(x_0+h)}=\frac{f^{n+1}(x_0+\theta h)}{\Phi^{n+1}(x_0+\theta h)} \quad \ldots\ldots \text{(IV.)}$$

Aan de voorwaarden (1) en (2) wordt slechts dán alleen en volkomen voldaan, indien men

$$\Phi(x_0+h)=(x_1-x_0)^{n+1}$$

stelt, daarbij $x_0+h=x_1$ nemende; want de eerste achtereenvolgende $n+1$ afgeleiden zullen dan eindig, de verdere $=0$ zijn, terwijl tevens uit

$$\Phi(x_0+h)=\Phi(x_1)=(x_1-x_0)^{n+1},$$
$$\Phi'(x_0+h)=\Phi'(x_1)=(n+1)(x_1-x_0)^n,$$

en zoo voort,

voor $x_1=x_0$ volgt

$$\Phi(x_0)=0,\quad \Phi'(x_0)=0, \text{ enz.}$$

Eenig polynomium van (x_1-x_0) zoude wel de eerste, doch *niet* de tweede voorwaarde vervullen. Transcendente functiën

kunnen onmogelijk voldoen, omdat zulke een oneindig aantal differentiaalquotienten hebben.

Daar $x_0 + h = x_1$, is $x_1 - x_0 = h$, en dus $\Phi(x_0 + h) = h^{n+1}$.

Verder beide leden van de vergelijking

$$\Phi(x_0 + h) = (x_1 - x_0)^{n+1}$$

$(n+1)$-maal differentieerende, krijgt men

$$\Phi^{n+1}(x_0 + h) = (n+1)\ldots 2.\,1.$$

Te voren is echter bewezen, dat voor een geval als dit

$$\Phi^{n+1}(x_0 + h) = \Phi^{n+1}(x_0 + \theta h);$$

zoodat men, in verband met (IV), mag besluiten tot

$$f(x_0 + h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)} f^{n+1}(x_0 + \theta h).$$

Doch vergelijking (III) geeft door de substitutie $x = x_0$

$$f(x_0 + h) = \vartheta' \vartheta'_1 \ldots \vartheta'_{n-1} h^{n+1} f^{n+1}(x_0 + \theta h),$$

weshalve

$$\frac{1}{(n+1)!} = \vartheta' \vartheta'_1 \ldots \vartheta'_{n-1}.$$

Hadde men in plaats van bij den n^{en} bij den $(n-1)^{sten}$ term afgebroken, zoo zoude men gekomen zijn tot de identiteit

$$\frac{1}{n!} = \vartheta' \vartheta'_1 \ldots \vartheta'_{n-2},$$

dus is

$$\vartheta'_{n-1} = \frac{1}{n+1},$$

waaruit

$$\vartheta' = \frac{1}{2},\quad \vartheta'_1 = \frac{1}{3},\quad \text{enz.}$$

De juistheid van de vergelijking

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x + \theta h), \quad \ldots (V.)$$

't bekende theorema van Taylor, is hiermede, voor zooverre mij bekend, op eene nieuwe wijze aangetoond.

EENE TOEPASSING DER KANSREKENING OP DE LOTING VOOR DE NATIONALE MILITIE.

DOOR

J. W. RASCH.

In het werk van den Belgischen genie-officier J. B. J. LIAGRE »*Calcul des probabilités et théorie des erreurs*" éd. 1852 p. 35 [1]) wordt de volgende vraag behandeld. In eene gemeente zijn 10 jongelieden op het register der militieplichtigen ingeschreven, waaronder 3 met wettelijke redenen van vrijstelling, terwijl het aandeel der gemeente in de lichting 5 manschappen bedraagt. Hoe groot is de kans, dat nommer 7 moet dienen?"

De aldaar gegeven oplossing schijnt niet de juiste; in het volgende is getracht eene betere te leveren.

De gebruikelijke wijze van loten is die, dat in eene bus zoovele opgerolde briefjes met opvolgende nommers worden gedaan als er lotelingen zijn. Elk trekt een briefje en de hoogste nommers zijn vrij; zoo ver, tot dat onder de laagste nommers het gevorderde aantal lotelingen zonder vrijstelling voorkomt. Dus heeft de orde, waarin de verschillende nommers uit de bus komen, geen invloed op den uitslag der loting, evenmin die, waarin elk loteling zijn briefje trekt; alleen de orde, waarin de lotelingen zonder en met vrijstel-

---

1) Volgens een kort bericht in de Oprechte Haarlemsche Courant overleed de als generaal gepensioneerde schrijver in Januari van het jaar 1891.

ling op elkander volgen, wanneer zij naar de door haar getrokken nommers zijn gerangschikt.

Men kan dus met volkomen dezelfde kansen aannemen, dat de loting op de volgende wijze plaats heeft, dat namelijk voor elk loteling een briefje met zijn naam in de bus wordt gedaan, en elk het nommer verkrijgt, dat de orde aanduidt, waarin zijn naambriefje uitkomt. En daar slechts de kansen gevraagd worden van een bepaald nommer, kunnen wij volstaan met de lotelingen te onderscheiden in zulke zonder en met vrijstelling zoo dat de loting, wanneer wij de beschikbare lotelingen door witte, en die met vrijstelling door zwarte ballen voorstellen, terug gebracht wordt tot het trekken van een bepaald aantal witte en zwarte ballen uit eene bus, waarin zich een gegeven aantal ballen van elk der beide kleuren bevindt.

Een willekeurig nommer is dan vrij, behalve wanneer het met een zwarten bal uitkomt, ook wanneer onder de lagere nommers *tenminste* zoovele witte ballen zijn, als miliciens gevorderd worden. Omgekeerd is een nommer dienstplichtig, wanneer het vooreerst toevalt aan een witten bal, en daarenboven onder de lagere nommers *niet* een voldoend aantal witte ballen gevonden wordt.

Ter beantwoording van de gestelde vraag hebben wij de kans te kennen, dat uit eene bus met m witte en n zwarte ballen, van $p+q$ er uit genomen ballen p wit en q zwart zijn. Stelt $m!$ voor het product $m(m-1)(m-2)\ldots 1$ en C_p^m het aantal combinatiën van m elementen p aan p, dan is het aantal mogelijke combinatiën van de m witte ballen p aan p:

$$C_p^m = \frac{m!}{p! \times (m-p)!}.$$

De n zwarte ballen leveren combinatiën q aan q ten getale van:

$$C_q^n = \frac{n!}{q! \times (n-q)!}.$$

Eene combinatie van de eerste groep geeft, vereenigd met eene der tweede groep eene andere combinatie van p witte

en q zwarte ballen uit de $m+n$, die gegeven zijn. Dus bedraagt het aantal dezer combinatiën:

$$C_p^m \times C_q^n = \frac{m!}{p! \times (m-p)!} \times \frac{n!}{q! \times (n-q)!}.$$

Maar het geheele aantal combinatiën der $m+n$ ballen, $p+q$ aan $p+q$, alle even mogelijk als eene van de zoo even aangeduide, is:

$$C_{p+q}^{m+n} = \frac{(m+n)!}{(p+q)! \times (m+n-p-q)!},$$

dus is de kans, dat van de $p+q$ getrokken ballen p wit en q zwart zijn:

$$K = \frac{m!}{p! \times (m-p)!} \times \frac{n!}{q! \times (n-q)!} : \frac{(m+n)!}{(p+q)! \times (m+n-p-q)!} \quad (1)$$

Schrijven wij de gevonden uitdrukking voor K in den vorm:

$$K = \frac{(p+q)!}{p! \, q!} \times \frac{(m-p+n-q)!}{(m-p)! \times (n-q)!} : \frac{(m+n)!}{m! \times n!} \quad . . (2)$$

dan valt het aanstonds in het oog, dat dezelfde uitkomst zou verkregen zijn door niet de mogelijke combinatiën, maar de mogelijke permutatien te tellen, want elke breuk in de laatste vergelijking stelt voor het aantal mogelijke permutatien van een aantal elementen van tweeërlei soort.

Passen wij deze stelling toe op ons lotingsvraagstuk, dan is vooreerst de kans, dat nommer 7 valt op een loteling zonder vrijstelling $=\frac{7}{10}$. Maar wanneer nummer 7 met een witten bal uitkomt, is dat nommer slechts dienstplichtig, wanneer onder de zes lagere nommers 2 of 3 zwarte ballen zijn. De kans om te dienen is voor nommer 7 dus zamengesteld uit de kans, dat nommer 7 op een witten bal valt, en die, dat bovendien onder de zes lagere nommers 2 of 3 zwarte ballen zijn. Noemen wij de kansen voor de twee laatste gevallen K_1 en K_2, dan is de kans om te dienen voor nommer 7

$$\frac{7}{10}(K_1 + K_2).$$

Daar, wanneer nommer 7 met een witten bal is uitge-

komen, nog slechts 6 witte en 3 zwarte ballen voor de mogelijke opvolgingen der zes eerstuitkomende ballen beschikbaar blijven, vinden wij, met $m=6$, $n=3$, $p=4$ en $q=2$:

$$K_1 = \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} : \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{15}{28};$$

en met $m=6$, $n=3$, $p=3$ en $q=3$:

$$K_2 = \frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{3!}{3! \times 1!} : \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{5}{21}.$$

Alzoo is de kans om te dienen voor nommer 7:

$$\frac{7}{10}\left(\frac{15}{28} + \frac{5}{21}\right) = \frac{13}{24}.$$

Liagre vond daarvoor $\frac{49}{60}$, uitgaande van de meening, dat nommer 7 dienstplichtig zou zijn, indien onder de 7 laagste nommers 2 of 3 zwarte ballen voorkwamen. Men ziet licht in, dat hij verzuimde de kansen mede te tellen, die elk nommer heeft om toe te vallen aan een loting met vrijstelling. Hij vond voor de kansen, dat onder de 7 eerstuitkomende ballen 2 of 3 zwarte ballen zijn, naar behooren $\frac{63}{120}$, respectievelijk $\frac{35}{120}$ of $\frac{21}{40}$ en $\frac{7}{24}$. Maar het was niet juist, te zeggen, dat in deze gevallen nommer 7 moet dienen. In beide gevallen blijft nog de mogelijkheid over, dat nommer 7 op een zwarten bal valt, waarvoor de kansen respectievelijk zijn $\frac{2}{7}$ en $\frac{3}{7}$, zoodat de kans voor nommer 7 om vrij te zijn, volgens Liagre $\frac{11}{60}$, nog moet worden vermeerderd met:

$$\frac{2}{7} \times \frac{21}{40} + \frac{3}{7} \times \frac{7}{24} = \frac{11}{40}.$$

Dan wordt de totale kans om vrij te zijn, voor nommer 7:

$$\frac{11}{60} + \frac{11}{40} = \frac{11}{24},$$

overeenstemmende met de kans, die wij voor het dienstplichtig zijn berekenden.

Zoeken wij de kansen om te dienen, ook voor de overige nommers, dan vinden wij die:

voor nommer 6 ... $\frac{16}{24}$

» » 8 $\frac{7}{24}$.

De nommers 1 tot 5 zijn in ieder geval slechts vrij, wanneer zij op een loteling met vrijstelling vallen, terwijl de nommers 9 en 10 altijd vrij zijn.

Eene andere is de vraag, hoe groot de kans is voor elken loteling, die geene reden van vrijstelling heeft, om ingelijfd te worden. Die kans hangt natuurlijk alleen af van het aantal, dat voor de lichting gevorderd wordt, en het aantal lotelingen zonder vrijstelling; in het hier behandelde geval is zij $\frac{5}{7}$.

Langs anderen, niet den naasten, weg verkrijgt men het zelfde antwoord op de laatste vraag door de volgende beschouwing. Elk loteling heeft $\frac{1}{10}$ kans om elk der nommers 1 tot 10 te trekken. Heeft een loteling geene reden van vrijstelling, dan is, wanneer hij een der nommers 1 tot 5 trekt, de kans om te dienen $=1$. Met nommer 6 is die kans voor denzelfden loteling $=\frac{20}{21}$, met nommer 7 $=\frac{65}{84}$, met nommer 8 $=\frac{5}{12}$, met nommer 9 of nommer $10=0$.

In het geheel is zijne kans om te dienen dus:

$$\frac{1}{10}\left(5+\frac{20}{21}+\frac{65}{84}+\frac{5}{12}\right)=\frac{5}{7}.$$

EEN VRAAGSTUK OVER MECHANICA.

DOOR

C. KREDIET.

Op bl. 159 van R. LOBATTO's verzameling van vraagstukken ter oefening enz. komt het volgende voor:

»Indien n krachten, op een punt P werkende, een resultante opleveren, en men gelijke massa's plaatst op afstanden uit dat punt, die de gegevene krachten in grootte en richting voorstellen, zal deze resultante gericht zijn door het zwaartepunt der massa's en in grootte voorgesteld worden door n-maal den afstand van dit zwaartepunt tot het punt P".

Indien men dit vraagstuk verandert in: Op een punt P werken $n - 1$ krachten. Bewijs dat de resultante gaat door 't zwaartepunt van n gelijke massa's, die men plaatst aan de uiteinden van lijnen, die de krachten voorstellen, en in P, en dat zij wordt voorgesteld door n-maal den afstand van P tot dat zwaartepunt.

Dan is een zeer eenvoudige oplossing te geven. Zij A B C D (fig. 1) een parallelogram, en AE het $\frac{1}{m-1}$de deel van A D. Trekken we E B en A C, dan is A F het $\frac{1}{m}$de deel van A C en E F het $\frac{1}{m}$de deel van E B. Dit volgt onmiddellijk uit de gelijkvormigheid van de driehoeken A E F en C B F. Stelt nu A D de resultante voor van $m - 2$ krachten op A werkende en

is E het zwaartepunt van de $m - 1$ massa's, geplaatst zooals bovenbedoeld, dan is, als A B de $m - 1^{de}$ kracht voorstelt, ook F het zwaartepunt van m-massa's en A C de resultante. Hierdoor is dus bewezen dat, als de stelling voor $m - 2$ krachten doorgaat, zij ook waar is voor $m - 1$. Nu is zij stellig waar voor ééne kracht, dus ook voor twee, enz.

Uit dit vraagstuk zijn thans belangrijke vraagstukken af te leiden b. v.:

Als op een punt P krachten werken, die in richting en grootte worden voorgesteld door de twee zijden en de diagonalen, die in P samenkomen, van een regelmatigen n-hoek, gaat de resultante door het middelpunt en wordt voorgesteld door n-maal den straal des omgeschreven cirkels.

Als op een hoekpunt P van een regelmatig veelvlak krachten werken, in richting en grootte voorgesteld door de lijnen, die P met de andere hoekpunten verbinden, is de resultante gericht door het middelpunt en gelijk aan n-maal den straal des omgeschreven bols, als n het aantal hoekpunten des veelvlaks is.

EEN STELLING OP 'T GEBIED DER ELEMENTAIRE MECHANICA,

DOOR

C. KREDIET.

In mijne »Verzameling van Natuurkundige Vraagstukken" vindt men, in § 2 als n^0. 21, het volgende vraagstuk:

Op twee punten A en B van een lichaam werken twee krachten P en Q, wier richtingen elkander in een punt C snijden. Indien P en Q een gegeven hoek vormen, is de meetkundige plaats van het punt C een cirkel. De resultante van P en Q gaat altijd door eenzelfde punt van dien cirkel. Men vraagt dit te bewijzen.

Is D dit punt van den cirkelomtrek, en R de resultante van P en Q, dan is ook $\frac{P}{BD} = \frac{Q}{AD} = \frac{R}{AB}$.

Deze stelling is in verschillende opzichten belangrijk voor de elementaire mechanica. Het bewijs er voor is zóó eenvoudig, dat iedere leerling eener Hoogere Burger-School dit gemakkelijk zal vinden, en alsdan zal hij daardoor komen tot de conclusie dat, als eenige krachten, in één plat vlak werkende, worden samengesteld, er één punt is op de lijn, volgens welke de resultante werkt, dat geheel en al overeen komt met het middelpunt van eenige evenwijdige krachten; daar de resultante altijd door dat punt zal gaan, wanneer de krachten om hunne aangrijpingspunten in denzelfden zin een gelijken hoek gedraaid worden, of wanneer zij allen in dezelfde verhouding vergroot of verkleind worden.

Indien de krachten P en Q evenwijdig loopen, valt het punt C op oneindigen afstand; doch het punt D valt op de lijn A B. Hieruit volgt, dat C A, C B en C D evenwijdig zullen zijn, en dus is de resultante van P en Q evenwijdig aan deze krachten. Bovendien volgt uit de betrekking $\frac{P}{BD} = \frac{Q}{AD} = \frac{R}{AB}$ thans $R = P + Q$, want $AD + BD = AB$ en eindelijk blijft de beerekking $P \,.\, AD = Q \,.\, BD$, zoodat door dit vraagstuk de theorie der evenwijdige krachten wordt afgeleid uit die, welke elkander snijden.

OVER DE VERDEELING VAN EEN HOEK IN EEN WILLEKEURIG AANTAL GELIJKE DEELEN.

BIJVOEGSEL

DOOR

Dr. A. KEMPE.

Nadat het voorgaande op bladzijde 163 was geschreven en afgedrukt, is het mij gelukt een uitbreiding aan het daar vermelde te kunnen geven, die het mij vergund moge zijn in 't kort hier reeds mede te deelen, mij voorbehoudende in een volgend nummer er meer in extenso op terug te komen.

1°. Wanneer men in het 2e en 3e kwadrant met O als middelpunt een halven cirkel beschrijft, met O M als straal, door O weêr vele lijnen trekt en deze door de snijpunten heen met den cirkel, verlengd met stukken, die gelijk zijn aan hun respectieve afstanden tot M — altijd maar weêr tot M — dan krijgt men een kromme, die een cardioïd-vormige gedaante heeft. Past men op deze dezelfde wet van verlenging toe — steeds maar weêr M bezigende als centraalpunt — dan krijgt men een stelsel kromme lijnen, die de merkwaardige eigenschap bezitten van een hoek α, bij M aangebracht, in $2^n - 1$ gelijke deelen te verdeelen.

2°. De lijnen $2^n + 1$ en $2^n - 1$ — ik zal ze kortheidshalve maar dús noemen — vertoonen de merkwaardige eigenschap in elkander over te gaan.

3°. Beide stelsels gehoorzamen aan de gemeenschappelijke wet, dat ze de meetkundige plaatsen zijn der toppen van

driehoeken, die, op de vaste basis O M staande, tophoeken bezitten, die het $\frac{1}{2^n \pm 1}$ deel van den hoek α uitmaken, in het centraalpunt M aangebracht.

4°. Daar volgens een theorema van FERMAT elk ondeelbaar getal p gedeeld kan worden op $2^{p-1} - 1$, zoo zal dus, daar $p - 1$ even is, p òf deelbaar moeten zijn op $2^{\frac{p-1}{2}} + 1$, òf op $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$; en daardoor zal er altijd één der lijnen uit het geheele stelsel $2^n \pm 1$ aangewezen kunnen worden, die een deel van een hoek doen vinden, waarvan de noemer een ondeelbaar getal p is. Hierdoor kan een hoek α in een willekeurig aantal gelijke deelen worden verdeeld.

5°. Men kan als gevolg van het Theorema van FERMAT vooruit bepalen, welke lijn uit het stelsel de verlangde deeling volbrengen zal.

OVER EEN STELLING VAN JACOBI.

DOOR

Dr. A. VAN THIJN.

Bij zijne beschouwingen omtrent elliptische integralen komt JACOBI onder anderen tot de volgende stelling:

Gegeven zijn twee cirkels, de eene geheel binnen den anderen. In den buitencirkel kan een n-hoek beschreven worden, wiens zijden den binnencirkel raken. Dan kan door ieder punt van den buitencirkel een zoodanige n-hoek beschreven worden.

Ofschoon deze stelling geheel tot het gebied der planimetrie behoort, is zij, voor zoover mij bekend, nooit in haar algemeensten vorm bewezen, dan alleen met behulp van elliptische integralen.

Hier volgt nu een algemeene methode, die al dergelijke quaesties kan uitmaken en die ons niet alleen zal leiden tot het bewijs van genoemde stelling, maar ons tevens zal doen zien, dat deze regel ook opgaat voor een paar ellipsen.

Om onze beschouwingen zoo algemeen mogelijk te maken, denken wij ons in de eerste plaats twee gesloten krommen, waarvan de eene geheel binnen de andere gelegen is, terwijl zij overal hunne bolle zijde naar buiten keeren. Aan een zoodanige kromme kunnen van uit een punt er buiten altijd twee raaklijnen getrokken worden. Een rechte lijn snijdt haar hoogstens in twee punten.

De raaklijn P Q van uit een punt P aan de binnenkromme getrokken is dus geen ondubbelzinnig gegeven lijn; wij dienen daaromtrent nog eenige afspraak te maken. Daartoe geven wij op de buitenkromme de richting aan, waarin wij haar doorloopen. Door de raaklijn van P aan de binnenkromme zullen wij die verstaan, waarbij het stuk P Q van de buitenkromme, in de aangegeven richting doorloopen van P naar Q, aan een anderen kant van de raaklijn P Q ligt dan de binnenkromme. Zoo is in figuur 1 P Q de raaklijn van P en R P de raaklijn van R.

Van drie punten P_1, P_2, P_3, op de buitenkromme gelegen, zeggen wij, dat P_3 tusschen P_1 en P_2 ligt, indien wij van P_1 in de aangegeven richting loopende het eerst in P_3 komen en dan in P_2. In figuur 1 ligt bijvoorbeeld P_3 tusschen P_1 en P_2, maar P_4 tusschen P_2 en P_1. Nu hebben wij de volgende eenvoudige stelling:

I. Zijn P_1, P_2, P_3 en P_4 punten van de buitenkromme, $P_1 P_2$ de raaklijn van P_1 aan de binnenkromme, $P_3 P_4$ de raaklijn van P_3 aan die kromme; en ligt P_3 tusschen P_1 en P_2, dan ligt ook P_2 tusschen P_3 en P_4.

Trekken wij van uit P_0, een punt der buitenkromme, de raaklijn $P_0 P_1$, van uit P_1 de raaklijn $P_1 P_2$, enz. Wij gaan nu na, het hoeveelste punt P_n dezer reeks tusschen P_0 en P_1 gelegen zal zijn. Zij dit ranggetal $n = n_1$. Het is nu de vraag, welke waarde wij voor n zullen krijgen, indien wij van een ander punt dan P_0 uitgaan.

In de eerste plaats is het duidelijk, dat, indien wij niet van P_0, maar van een der opvolgende punten P_1, P_2, P_3, enz. waren uitgegaan, wij tot dezelfde waarde van n waren gekomen. Immers, indien P_{n_1} tusschen P_0 en P_1 ligt, dan ligt P_{n_1+1} tusschen P_1 en P_2 en wij krijgen deze opvolging der verschillende punten

$$P_0, P_{n_1}, P_1, P_{n_1+1}, P_2, P_{n_1+2}, P_3, \ldots P_m, P_{m+n_1}, P_{m+1}, \text{ enz.}$$

Het verschil tusschen m en $m+n_1$ is n_1, dus juist als bij P_0.

In de tweede plaats kiezen wij als punt van uitgang een punt Q_0 gelegen tusschen P_0 en P_1. Wij krijgen nu de volgende rij punten (blijkens Stelling I):

P_0, Q_0, P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, ... P_{n_1-1}, Q_{n_1-1}, P_{n_1}, Q_{n_1}, P_{n_1+1}, enz.

Q_{n_1} ligt dus tusschen P_{n_1} en P_{n_1+1}, maar wij moeten weten, voor welke waarde van n, Q_n tusschen Q_0 en Q_1 ligt. Nu ligt P_{n_1}, zooals wij aangenomen hebben, tusschen P_0 en P_1, P_{n_1+1} dus tusschen P_1 en P_2, derhalve ook Q_{n_1} tusschen P_0 en P_2. Wij hebben dus gevonden dat Q_0 en Q_{n_1} tusschen P_0 en P_2 liggen. Het is dan eenvoudig hieruit met behulp van stelling I afteleiden, dat òf Q_{n_1} òf Q_{n_1+1} òf Q_{n_1-1} tusschen Q_0 en Q_1 moet liggen. Derhalve verschilt de waarde van n bij Q_0 hoogstens de éénheid met die bij P_0.

Wij hebben aangenomen, dat Q_0 tusschen P_0 en P_1 gelegen is; maar nu alle P's dezelfde waarde voor n opleveren, is het onverschillig, waar Q_0 op de buitenkromme gelegen is. *Wij hebben dus bij ieder paar krommen slechts twee waarden van n op zijn hoogst, namelijk n_1 en n_1+1.*

Laten we nu een punt P_0 de geheele buitenkromme rondgaan. Op sommige plaatsen zal $n=n_1$ zijn, en P_{n_1} dus vóór P_0, dus tusschen P_0 en P_1 liggen; op andere plaatsen is $n=n_1+1$, en daar ligt P_{n_1} achter P_0, of tusschen P_{-1} en P_0. Passeeren wij van eerstgenoemd deel der buitenkromme naar laatstgenoemd deel, dan moet daar ook P_n P_0 passeeren, m. a. w.

De grens van een deel der kromme, waar $n=n_1$ is, en van het deel, waar $n=n_1+1$ is, wordt gevormd door een hoekpunt van een n_1-hoek, wiens zijden de binnenkromme raken, en wiens hoekpunten allen op de buitenkromme gelegen zijn.

Gesteld nu, dat in de buitenkromme een n-hoek kan beschreven worden, wiens zijden de binnenkromme raken. Noemen wij een dier hoekpunten P_0 en de andere naar volgorde P_1, P_2, P_3, enz. Nu valt P_n met P_0 samen. Van een punt Q_0, gelegen tusschen P_0 en P_1, teekenen wij evenzoo de opvolgende punten Q_1, Q_2, enz. [figuur 2].

De volgorde der punten P en Q is aldus

P_0, Q_0, P_1, Q_1, ... P_m, Q_m, ... P_n, Q_n, P_{n+1}, enz.

Nu hebben wij $P_n=P_0$ en $P_{n+1}=P_1$; derhalve ligt Q_n

tusschen P_0 en P_1, evengoed als Q_0, evenzoo Q_{2n}, Q_{3n}, enzoovoort. Wij hebben nu twee gevallen te onderscheiden: 1e Q_n tusschen Q_0 en P_1, dus ook tusschen Q_0 en Q_1. Maar dan ligt volgens de vóórgaande redeneeringen ook Q_{2n} tusschen Q_n en Q_{n+1}, Q_{3n} tusschen Q_{2n} en Q_{2n+1}, enzoovoort. Q_{mn} blijft dus steeds tusschen P_0 en P_1, terwijl het voortdurend dichter bij P_1 komt, naarmate m grooter genomen wordt, 2e Q_n tusschen P_0 en Q_0, dus ook tusschen Q_{-1} en Q_0. Maar dan ligt ook Q_{2n} tusschen Q_{n-1} en Q_n, Q_{3n} tusschen Q_{2n-1} en Q_{2n}. Dan schuift Q_{mn} hoe langer hoe meer naar achteren, terwijl wij toch weten, dat Q_{mn} voor iedere waarde van m tusschen P_0 en P_1 ligt; bijgevolg nadert Q_{mn} hoe langer hoe meer in dit geval tot P_0.

Q_{mn} nadert dus in beide gevallen tot een bepaalden limietstand. Die limietstand behoeft echter in het eerste geval juist niet P_1, in het tweede geval juist niet P_0 te zijn.

Veronderstel, die limietstand is R_0, dan is het gemakkelijk in te zien, dat R_0 het hoekpunt moet zijn van een n-hoek, die in de buitenkromme kan beschreven worden, en wiens zijden de binnenkromme raken. Immers, indien, bij grooter worden van m, Q_{mn} onbepaald nadert tot R_0, dan moet de afstand van Q_{mn} en $Q_{(m+1)n}$ ook onbepaald kleiner worden; en dit is onmogelijk, indien de afstand van R_0 en R_n eindig is.

Is R_0 het e e r s t e punt, dat wij, in de aangegeven richting op de buitenkromme van uit Q_0 gaande, ontmoeten, wat nl. aan de voorwaarde voldoet, dat er een dusdanige veelhoek door beschreven kan worden; dan zal Q_{mn} er in het e e r s t e geval onbepaald toe naderen; want dan kunnen wij evengoed als bij P_1 bewijzen, dat Q_{mn} er achter moet blijven, en er dus onbepaald toe moet naderen. Evenzoo nadert Q_{mn} in het tweede geval tot een hoekpunt R_0 van een dergelijken om- en ingeschreven n-hoek, indien R_0 het eerste dusdanige punt is, dat wij, in tegengestelde richting op de buitenkromme gaande, ontmoeten.

Thans voeren wij een limiet-verhouding in. Geef aan Q_0 op de buitenkromme een kleine verplaatsing, dan verplaatst

zich ook Q_1 een weinig; evenzoo Q_2, Q_3, enz. De lengte van het boogje, over hetwelk wij Q_0 verschoven hebben, noemen wij Δs_0, dat bij Q_1 Δs_1, enz. Laten wij Δs_0 onbepaald kleiner worden, dan is dit ook het geval met Δs_1, Δs_2, enz. Ook zal dan in het algemeen $\frac{\Delta s_1}{\Delta s_0}$ tot een bepaalde limiet naderen. Stellen wij nu deze limietverhoudingen voor door $\frac{ds_1}{ds_0}$ $\frac{ds_2}{ds_0}$, enz.

Kan men nu een n-hoek beschrijven, die de binnenkromme met zijne zijden raakt en wiens hoekpunten op de buitenkromme gelegen zijn, dan nadert, bij Q_0, Q_{mn} steeds tot een zeker punt R_0. Daaruit volgt, dat

$$\lim_{m=\infty} \frac{ds_{mn}}{ds_0} = 0$$

is.

Gesteld namelijk, dat deze limietverhouding niet nul, maar gelijk a is, dan zal voor een of andere groote waarde van m

$$\frac{ds_{mn}}{ds_0} = a + \delta$$

zijn, waarin δ zeer klein is. Verder:

$$\frac{\Delta s_{mn}}{\Delta s_0} = a + \delta + \varepsilon,$$

waarin ε kleiner is dan zeker kleine grootheid, indien wij Δs_0 zekere grootheid niet laten overschrijden. Nu kunnen wij m zoo groot maken, dat de lengte van het boogje tusschen R_0 en Q_{mn} kleiner is dan zekere kleine grootheid α. Geven wij nu aan Q_0 de verplaatsing Δs_0, dan is de verplaatsing van Q_{mn}

$$\Delta s_{mn} = (a + \delta + \varepsilon)\ \Delta s_0.$$

Nu kunnen wij m wel zoo groot nemen, en dus α zoo klein, dat genoemde uitdrukking voor Δs_{mn} grooter zou zijn dan α. Dit zou beteekenen, dat Q_{mn}, voor zekeren stand van Q_0, voorbij R_0 gegaan is; dit kan niet: zoolang Q_0 binnen zekere grenzen blijft, blijft ook Q_{mn} vóór R_0. Derhalve is onze veronderstelling onjuist, en moet

$$\lim_{m=\infty} \frac{ds_{mn}}{ds_0} = 0$$

zijn.

Thans zijn wij in staat de genoemde stelling van JACOBI te bewijzen. Daartoe gaan wij na, wat bij twee cirkels $\frac{ds_1}{ds_0}$ wordt. Denken wij ons Δs_0, dat is $Q_0\,Q_0^1$ in figuur 3, zeer klein, dan kunnen wij voor het hoekje $Q_0\,A\,Q_0^1$, dat wij ω zullen noemen, bij benadering schrijven

$$\frac{\Delta s_0 \,.\, \cos \theta_0}{r_0}$$

waarin θ_0 den hoek voorstelt, dien de normaal aan de kromme in Q_0 met de raaklijn $Q_0\,O_0$ maakt; verder is r_0 de lengte dier raaklijn $Q_0\,Q_1$. Voor het hoekje ω kunnen wij echter ook schrijven

$$\frac{\Delta s_1 \cos \theta_1^{\,1}}{r_1^{\,1}}$$

Hierin is $\theta_1^{\,1}$ de hoek, dien de raaklijn $Q_0\,A\,Q_1$ met de normaal in Q_1 maakt, $r_1^{\,1}$ de lengte der lijn $A\,Q_1$, en Δs_1 de verschuiving van Q_1 of het boogje $Q_1\,Q_1^{\,1}$.

In het algemeen zullen wij onder θ_p verstaan den hoek, dien de bij definitie bepaalde raaklijn van Q_p met de normaal van de buiten-kromme in Q_p maakt, en onder $\theta_p^{\,1}$ den hoek van deze normaal met de andere raaklijn, aan de binnenkromme van uit Q_p getrokken. Evenzoo beteekent r_p de lengte van eerstgenoemde raaklijn, van uit Q_p getrokken, en $r_p^{\,1}$ de lengte van de andere raaklijn.

Nu is bij de twee cirkels

$$\theta_p = \theta^1_{\,p+1}, \; r_p = r^1_{\,p}.$$

Het hoekje ω wordt bij de limiet

$$\omega = \frac{ds_0 \cos \theta_0}{r_0} = \frac{ds_1 \cos \theta_1^{\,1}}{r_1^{\,1}}.$$

Dus hebben wij hier

$$\frac{ds_0}{r_0} = \frac{ds_1}{r_1}.$$

Evenzoo hebben wij

$$\frac{ds_1}{r_1} = \frac{ds_2}{r_2}, \; \frac{ds_p}{r_p} = \frac{ds_{p+1}}{r_{p+1}}.$$

Derhalve ook

$$\frac{ds_0}{r_0} = \frac{ds_{mn}}{r_{mn}}.$$

Gesteld nu, dat in de twee cirkels een n-hoek kan beschreven worden. Dan hebben wij in het algemeen bewezen, dat Q_{mn} voor m oneindig groot een bepaalde limietstand aanneemt, en dat dan $\lim_{m=\infty} \frac{ds_{mn}}{ds_0} = 0$ is, tenminste indien Q_n, en dus ook Q_{mn}, niet met Q_0 samenvalt. Doch hier wordt deze verhouding

$$\frac{r_{mn}}{r_0};$$

nadert nu Q_{mn} tot een bepaald punt, dan nadert r_{mn} tot de waarde, die r daar heeft, en onze limietverhouding nadert tot een wel van nul te onderscheiden waarde. Dit is in strijd met hetgeen wij bewezen hebben, en dus is de veronderstelling, dat Q_n niet met Q_0 samenvalt, onjuist; en wij hebben derhalve de stelling

II. Zijn beide krommen cirkels, en valt P_0 met P_n samen, dan valt ieder willekeurig punt Q_0 van den buitencirkel met Q_n samen.

Het bewijs voor het geval van twee ellipsen zal op denzelfden grondslag berusten. Daar hebben wij echter niet de algemeene vergelijkingen

$$\theta_p = \theta^1{}_{p+1} \text{ en } r_p = r_p{}^1.$$

Wij kunnen daar die herleidingen niet toepassen, en hebben dus

$$\frac{ds_0 \cos\theta_0}{r_0} = \frac{ds_1 \cos\theta_1{}^1}{r_1{}^1},$$

$$\frac{ds_1 \cos\theta_1}{r_1} = \frac{ds_2 \cos\theta_2{}^1}{r_2{}^1}, \text{ enz.}$$

Hieruit volgt door alle opvolgende vergelijkingen met elkaar te vermenigvuldigen:

$$\frac{ds_0 \,.\, \cos\theta_0 \,.\, \cos\theta_1 \,.\, \cos\theta_2 \,.\,.\, \cos\theta_{mn-1}}{r_0 \,\cdot\, r_1 \,.\, r_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, r_{mn-1}} =$$

$$= \frac{ds_{mn} \,.\, \cos\theta_1{}^1 \,.\, \cos\theta_2{}^1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \cos\theta_{mn}}{r_1{}^1 \,.\, r_2{}^1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, r^1{}_{mn}}.$$

Gesteld nu, dat in de ellipsen een n-hoek is te beschrijven op de aangegeven wijze, en valt een punt Q_0 der buitenellips niet met Q_n samen, dan nadert Q_{mn} tot een bepaald punt R: terwijl de limiet van $\frac{ds_{mn}}{ds_0}$ nul is. Toonen wij nu weer aan, dat genoemde verhouding eindig en niet nul is, dan blijkt, dat onze veronderstelling onjuist is, en dat steeds, voor iederen stand van Q_0, Q_n er mee moet samenvallen. Wij moeten nu de uitdrukking, zooeven voor $\frac{ds_{mn}}{ds_0}$ verkregen, onderzoeken; wij zullen daartoe in de eerste plaats nagaan, wat er is van de uitdrukking

$$\frac{r_0 \; r_1 \; r_2 \; \ldots \; r_{mn}}{r_0^1 \, r_1^1 \, r_2^1 \ldots r^1_{mn}},$$

om daarna over te gaan tot:

$$\frac{\cos\theta_0 \; . \cos\theta_1 \; . \cos\theta_2 \ldots . \cos\theta_{mn}}{\cos\theta_0^1 . \cos\theta_1^1 . \cos\theta_2 \ldots . \cos\theta^1_{mn}}.$$

Stelling III. Beschrijf om een ellips een n-hoek $Q_0 Q_1 Q_2 \ldots\ldots Q_{n-1}$ met de raakpunten: $Q_{01}, Q_{12}, \ldots\ldots Q_{(n-1)0}$, dan is

$$\frac{\overline{Q_0 Q_{01}} \, . \, \overline{Q_1 Q_{12}} \ldots\ldots\ldots \overline{Q_{(n-1)} Q_{(n-1)0}}}{\overline{Q_0 Q_{(n-1)0}} \, . \, \overline{Q_1 Q_{01}} \ldots\ldots\ldots \overline{Q_{(n-1)} Q_{(n-1)(n-2)}}}$$

of

$$\frac{r_0 \; . \, r_1 \; . \, r_2 \; . \, r_3 \; \ldots\ldots \; r_{n-1}}{r_0^1 \, . \, r_1^1 \, . \, r_2^1 \, . \, r_3^1 \ldots\ldots r_{n-1}^1},$$

gelijk aan de éénheid. — (Zie figuur 4.)

Bewijs.

Genoemde stelling is bekend voor den driehoek.

Verbindt men namelijk de hoekpunten des omgeschreven driehoeks met de raakpunten der overstaande zijden, dan snijden de drie verbindingslijnen elkaar in één punt. (Dit kan men bijvoorbeeld afleiden uit de stelling van Pascal.) Uit de omstandigheid, dat de verbindingslijnen elkaar in één punt snijden, volgt blijkens de stelling van Menelaus, dat onze vergelijking bij den omgeschreven driehoek opgaat.

Brengt men nu een vierde raaklijn aan, dan snijdt deze

van den driehoek een anderen driehoek af, en er blijft een omgeschreven vierhoek over.

Past men nu op den oorspronkelijken driehoek en op den afgesneden driehoek onze stelling toe, en vormt het produkt van beide aldus verkregen breuken, dan komt er de breuk, die wij voor den omgeschreven vierhoek moeten hebben; dus gaat den stelling ook bij den vierhoek op. Door voortzetting van deze bewerking blijkt, dat de stelling voor iederen omgeschreven veelhoek opgaat.

Stelling. Bij een veelhoek beschreven in een ellips hebben wij met uit het vóórgaande gemakkelijk verstaanbare notaties

$$\frac{\cos\theta_0 \,.\cos\theta_1 \,.\cos\theta_2 \ldots\ldots \cos\theta_n}{\cos\theta_0^{\,1}.\cos\theta_1^{\,1}.\cos\theta_2^{\,1}\ldots\ldots\cos\theta_n^{\,1}} = 1.$$

(Zie figuur 5.)

Bewijs. Zijn $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_n$ de hoekpunten, en nemen wij de volgende notaties

$\rho_{p,p+1}$ voor de lengte van de zijde $\overline{Q_p \,.\, Q_{p+1}}$, en d_p voor de afstand van het middelpunt tot de raaklijn aan de ellips bij Q_p; zij verder de vergelijking van de ellips op hare assen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dan kunnen wij de volgende vergelijking opschrijven

$$\cos\theta_p = \frac{x_p - x_{p+1}}{\rho_{p.p+1}} \cdot \frac{d_p \,.\, x_p}{a^2} + \frac{y_p - y_{p+1}}{\rho_{p.p+1}} \cdot \frac{d_p \,.\, y_p}{b^2} =$$

$$= \frac{d_p}{\rho_{p.p+1}} \cdot \left[1 - \frac{x_p\, x_{p+1}}{a^2} - \frac{y_p\, y_{p+1}}{b^2}\right].$$

Evenzoo

$$\cos\theta_p^{\,1} = \frac{d_p}{\rho_{p.p-1}} \left[1 - \frac{x_p\, x_{p-1}}{a^2} - \frac{y_p\, y_{p-1}}{b^2}\right].$$

Derhalve wordt het gedurig produkt in den teller gelijk aan dat in den noemer, en de stelling is bewezen.

Keeren wij thans tot het oorspronkelijke vraagstuk terug.

Wij veronderstelden, dat Q_n niet met Q_0 samenviel, dan moest toch Q_{mn} tot een bepaalden limietstand naderen. Verder hebben wij gevonden

$$\frac{ds_{mn}}{ds_0} = \frac{r_1{}^1\, r_2{}^1 \ldots\ldots r_{mn}{}^1}{r_0\, r_1\, r_2 \ldots\ldots r_{mn-1}} \cdot \frac{\cos\theta_0 \,.\, \cos\theta_1 \ldots\ldots \cos\theta_{mn-1}}{\cos\theta_1{}^1 \,.\, \cos\theta_2{}^1 \ldots\ldots \cos\theta_{mn}{}^1}.$$

De eerste breuk is eindig, indien Q_{mn} tot een bepaalde limiet R nadert. Verlengen wij namelijk de raaklijn bij Q_{mn} en die bij Q_0, tot zij elkaar snijden in A, dan hebben wij een veelhoek, en vermenigvuldigen wij nu de breuk met die grootheden, welke het produkt van stelling III voor dezen veelhoek vormen, dan hebben wij een breuk, die gelijk aan de eenheid is. Die vermenigvuldiger is eindig, indien Q_{mn} tot R nadert, en dus nadert dit deel tot een bepaalde limiet, die van nul verschilt.

Zoo kunnen wij ook door voltooiing van den veelhoek, door Q_0 met Q_{mn} te verbinden, bewijzen, dat het produkt der cosinussen tot een limiet nadert voor $m = \infty$, die niet nul is; en daar

$$\lim_{m=\infty} \frac{ds_{mn}}{ds_0}$$

een van nul verschillende waarde zou hebben, moet dus Q_n steeds met Q_0 samenvallen, indien dit slechts éénmaal geschiedt.

2.

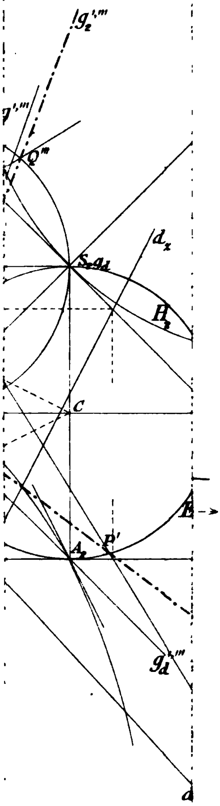


Fig. 2a.

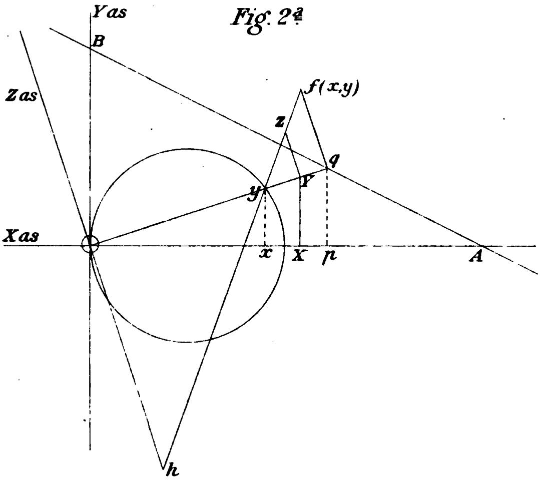


Fig. 5.

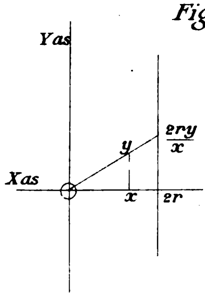


Fig. 4.

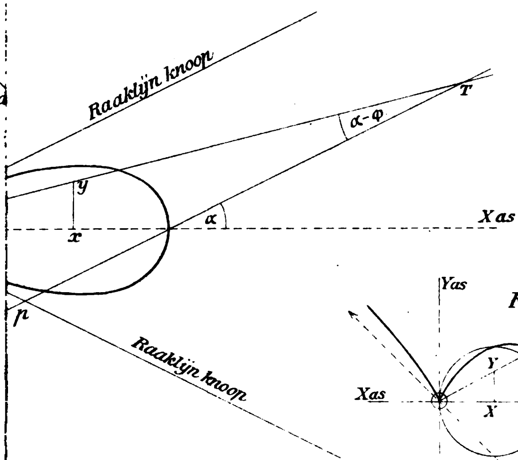
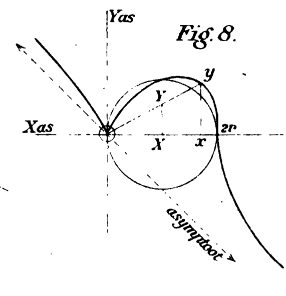
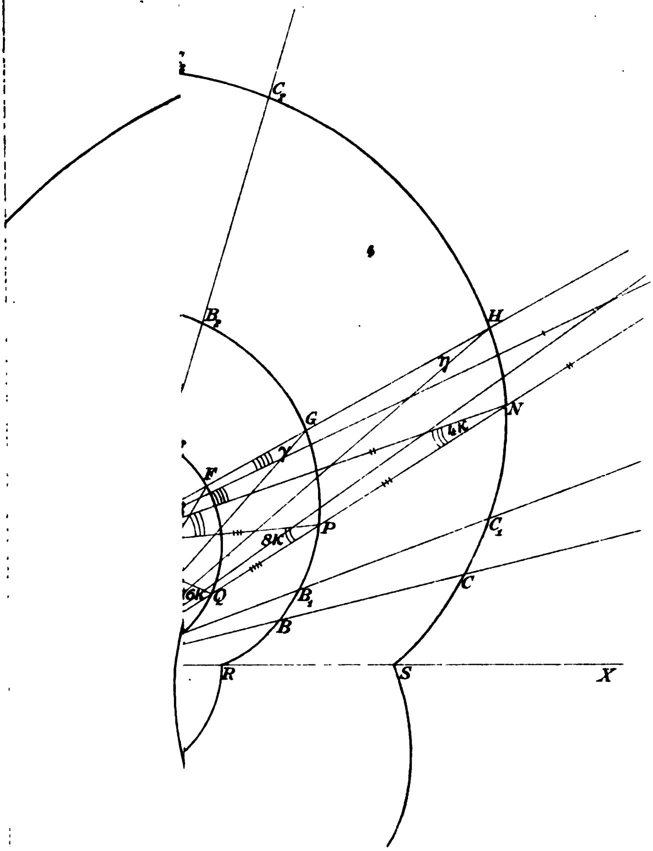


Fig. 8.



J.Bruel, sculps.

Fig. 1b



2.

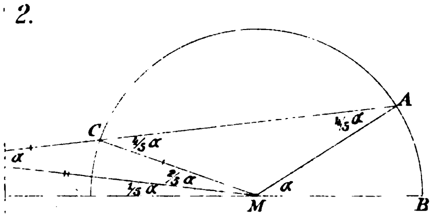


Fig. 1.

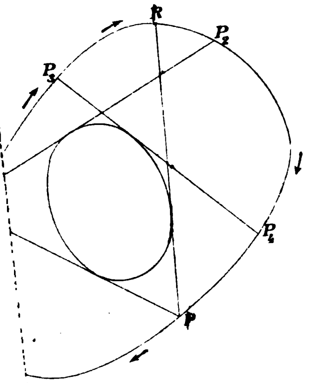


Fig. 3.

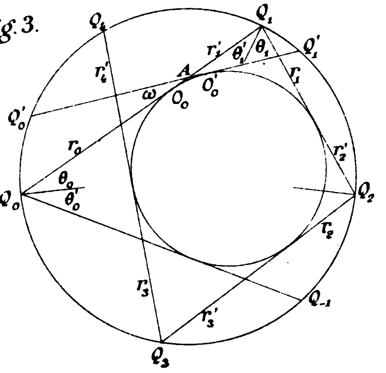


Fig. 2.

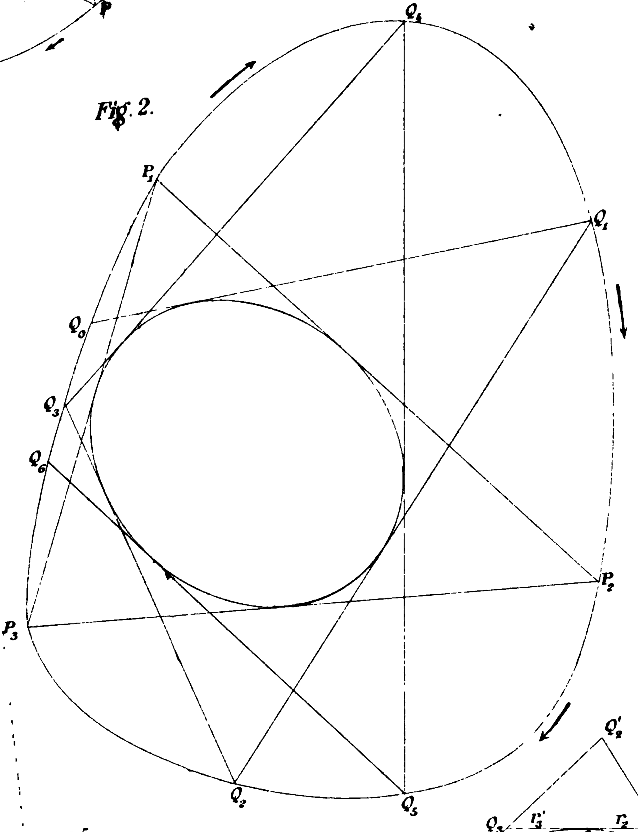


Fig. 5.

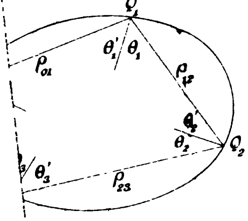


Fig. 4.

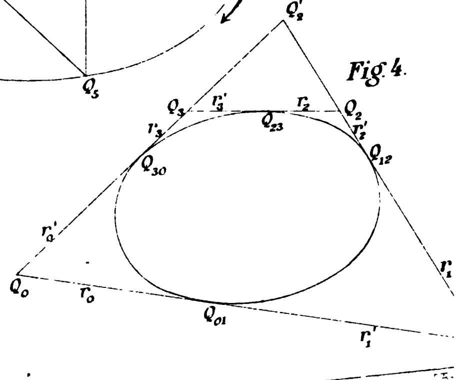


Fig. 1.

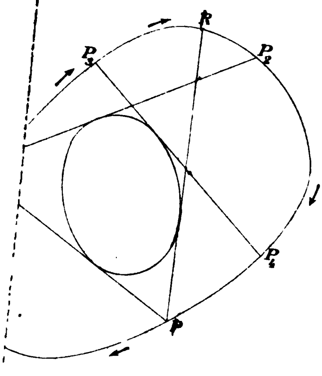


Fig. 3.

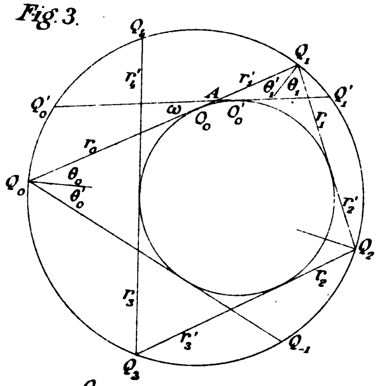


Fig. 2.

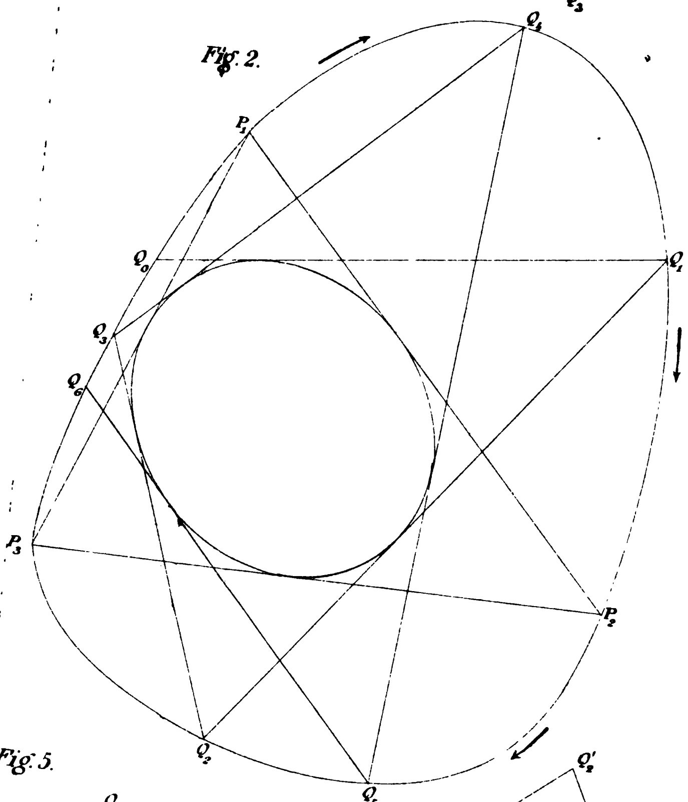


Fig. 5.

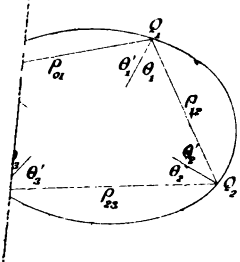


Fig. 4.